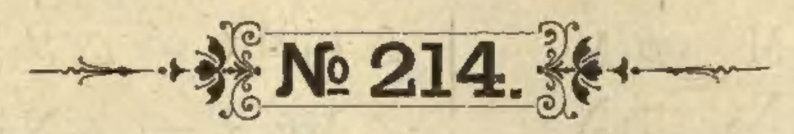
XVIII Сем. 5-го мая 1895 г. № 10.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ

и

ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

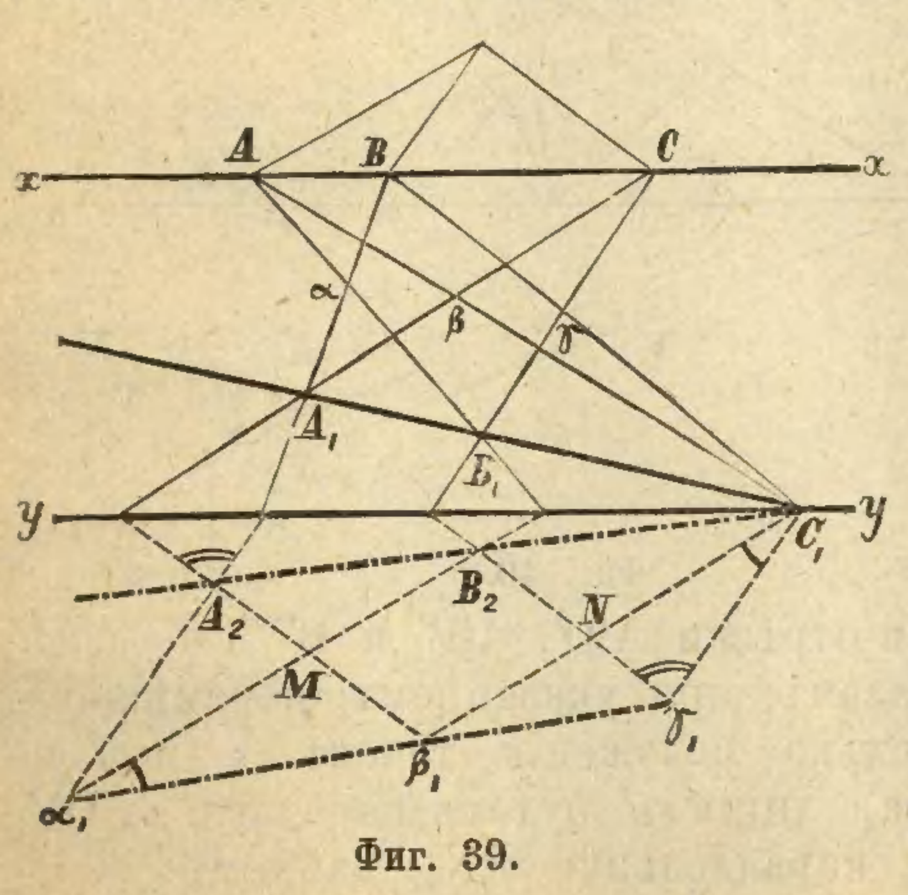


ОСОБЕННЫЙ СПОСОБЪ

РѢШЕНІЯ НѢКОТОРЫХЪ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ ЗАДАЧЪ.

*(Окончаніе *).*

Задача 2-я, указанная въ началѣ статьи. (Рѣшеніе этой задачи при помощи пріемовъ „Новой геометріи", помѣщено въ сочиненіи г. Кронеберга: „Элементарныя начала геометрическаго анализа").



Фиг. 39.

Дано: AC и A_1C_1 опредѣленныя по положенію прямыя. A, B, C и A_1, B_1, C_1—точки, произвольно взятыя на этихъ прямыхъ.

Надо доказать, что точки α, β, γ, найденныя извѣстнымъ образомъ, лежатъ на одной прямой. AC принимаемъ за ось xx, а за ось yy примемъ прямую, проведенную черезъ точку C_1. Затѣмъ, выбравъ точку O, построимъ точки A_2 и B_2—основныя для слѣдовъ A_1 и B_1 и—точки α_1, β_1 и γ_1—основныя для слѣдовъ α, β и γ.

**) См. „Вѣстникъ Оп. Физики" № 213.

Такъ какъ слѣды C_1, B_1 и A_1—лежатъ на одной прямой, то и основныя для нихъ точки C_1, B_2 и A_2, по теоремѣ 5-й, лежатъ на одной прямой. Для доказательства того, что точки α, β и γ лежатъ на прямой, докажемъ, что основныя для нихъ точки α_1, β_1 и γ_1 находятся на прямой. Справедливость послѣдняго видна изъ слѣдующаго:

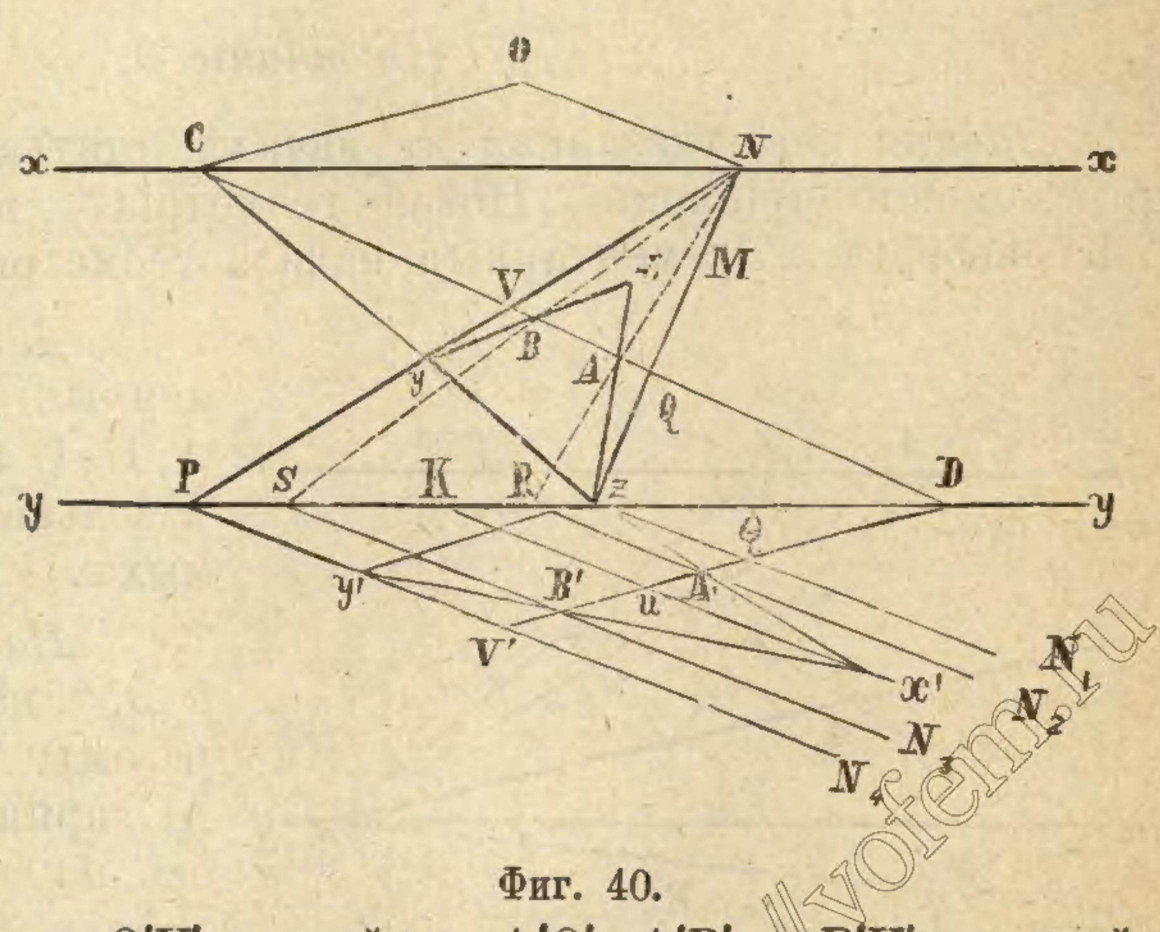
$$\left.\begin{array}{ll} \triangle A_2M\alpha_1 \infty \triangle\gamma_1NC_1; & \triangle A_2MB_2 \infty \triangle B_2NC_1 \\ \dfrac{\alpha_1M}{A_2M} = \dfrac{C_1N}{\gamma_1N} & \dfrac{A_2M}{B_2M} = \dfrac{B_2N}{C_1N} \end{array}\right\} \dfrac{\alpha_1M}{B_2M} = \dfrac{B_2N}{\gamma_1N} \text{ или}$$

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{\alpha_1M}{\beta_1N} = \dfrac{\beta_1M}{\gamma_1N} \\ \angle\alpha_1M\beta_1 = \angle\beta_1N\gamma_1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \triangle\alpha_1M\beta_1 \infty \triangle\beta_1N\gamma_1 \\ \angle M\alpha_1\beta_1 = \angle N\beta_1\gamma_1 \\ \text{линія } \alpha_1\beta_1\gamma_1 \text{—прямая.} \end{array}$$

Итакъ, дѣйствительно, α_1, β_1 и γ_1 находятся на прямой, а значитъ и слѣды ихъ α, β и γ лежатъ на прямой. Если бы AC и A_1C_1 были параллельны, то (при бо̀льшей простотѣ чертежа) пришли бы къ тому же заключенію.

Задача 3-я. Данъ уголъ MNP *и точки* A, B *и* C, *лежащія на одной прямой. Точка* C *лежитъ внѣ угла, а* B *и* A — *внутри. Найти геометрическое мѣсто вершины* x—*треугольника* xyz, *коего двѣ другія вершины* (y *и* z) *скользятъ по прямымъ* MN *и* PN, *а стороны проходятъ черезъ данныя точки* A, B *и* C. Задача взята изъ Аналитич. геометріи Салмона („Коническія сѣченія").

Прямую CN, соединяющую точку C съ вершиной даннаго угла, примемъ за ось xx, а ось yy проведемъ черезъ вершину z. Сдѣлавъ необходимыя построенія, по выборѣ точки O, найдемъ для слѣда xyz—основной чертежъ $x'y'z$. Перемѣщая сѣкущую Cz, для построенія новыхъ треугольниковъ xyz, по направленію къ точкѣ N — вершинѣ даннаго угла, найдемъ, что прямыя zN_1, RN_2, SN_3, PN_4 и DV' останутся неизмѣнными, а слѣдовательно $Q'V'$ и отрѣзки $A'Q'$, $A'B'$ и $B'V'$ не измѣнятъ своей величины. Такимъ образомъ, при указанномъ перемѣщеніи сѣкущей Cz, измѣняться будутъ только положенія точекъ z и y' на прямыхъ zN_1 и PN_4, причемъ новая линія zy' будетъ параллельна DV'. Проведя изъ точки x' прямую $x'K$, параллельную PN_4, найдемъ:



Фиг. 40.

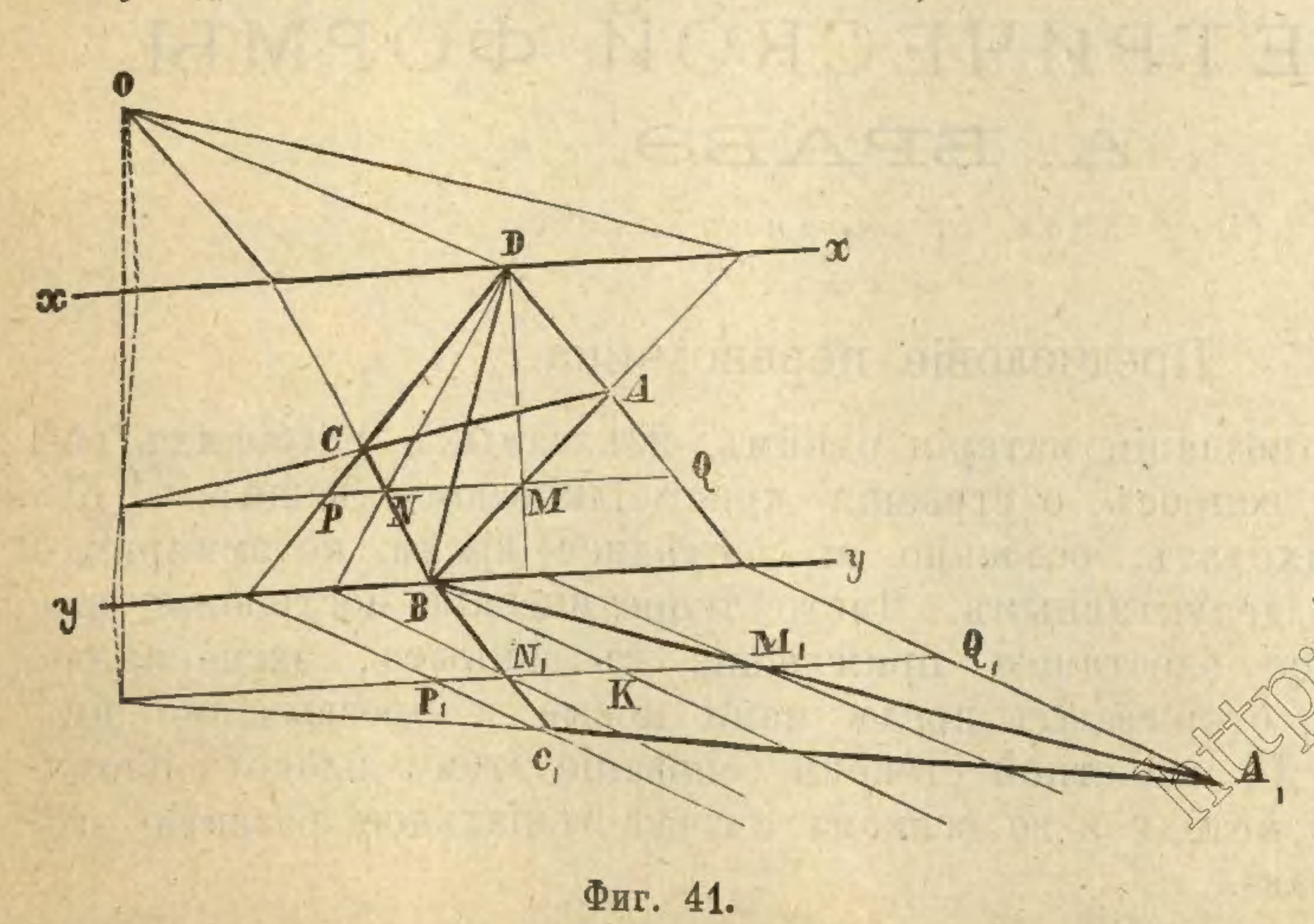
$$\frac{A'u}{B'u} = \frac{zK}{PK} = \frac{Q'u}{V'u} = \frac{A'Q'}{B'V'} = \text{постоянн.}$$

Слѣдовательно, при указанномъ перемѣщенiи сѣкущей Cz, точка x' перемѣщается по совершенно опредѣленной прямой, ибо эта послѣдняя проходитъ черезъ постоянную точку u и параллельна постоянной прямой PN_4. Если точка x' движется по прямой постоянной, то слѣдъ ея—точка x—движется (теор. 1-я) по слѣду этой постоянной прямой, который непремѣнно пройдетъ черезъ точку N (теорем. 2-я), т. е. черезъ вершину даннаго угла. Мы видѣли, что $\frac{zK}{PK} = \frac{A'Q'}{B'V'}$; это указываетъ, что прямая, представляющая искомое геометрическое мѣсто, разсѣкаетъ часть оси yy, заключающуюся между сторонами даннаго угла, въ отношенiи $(A'Q' : B'V')$.

Если станемъ теперь перемѣщать сѣкущую Cz въ направленiи, противоположномъ вершинѣ N даннаго угла, то, очевидно, придется измѣнить положенiе оси yy. Хотя черезъ это отрѣзки $A'Q'$ и $B'V'$ измѣнятся, но дробь $\frac{A'Q'}{B'V'}$, по теоремѣ 6-й, сохранитъ прежнюю величину; слѣдовательно, новая основная линiя искомаго геометрическаго мѣста раздѣлитъ часть новой оси yy, заключенную между сторонами даннаго угла, опять въ отношенiи, равномъ прежнему $(A'Q':B'V')$.

Такимъ образомъ, искомое геометрическое мѣсто есть постоянная прямая, ибо прямая эта, проходя черезъ вершину даннаго угла, дѣлитъ отрѣзки параллельныхъ прямыхъ (осей yy), заключенные между сторонами этого угла, въ постоянномъ отношенiи.

Задача 4-я, (обратная для предыдущей). Даны три постоянныя прямыя—DC, DB *и* DA, *выходящiя изъ точки* D. *Вершины нѣкотораго треугольника* ABC *скользятъ по этимъ прямымъ, причемъ двѣ стороны треугольника* (AB *и* BC) *проходятъ черезъ постоянныя точки* (M *и* N). *Показать, что и третья сторона также проходитъ черезъ постоянную точку*. („Коническiя сѣченiя“ Салмона).



Фиг. 41.

Ось xx проведемъ черезъ данную точку D, параллельно MN, а ось yy черезъ вершину B — треуг. ABC. Сдѣлавъ, по выборѣ точки O, построенiя, указанныя на чертежѣ, найдемъ, что фигура A_1BC_1 будетъ основная для слѣда ABC. Перемѣщая точку B въ направленiи BD, для образованiя новыхъ треугольн. ABC, замѣтимъ, что основныя точки для новыхъ вершинъ будутъ

скользить по постояннымъ прямымъ—Q_1A_1, BK и P_1C_1, параллельнымъ между собою, а положеніе P_1Q_1 и величины ея отрѣзковъ—P_1N_1, N_1K, KM_1 и M_1Q_1—не измѣнятся. Разсмотрѣніе чертежа даетъ:

$$\frac{C_1P_1}{BK}=\frac{P_1N_1}{N_1K} \text{ и } \frac{A_1Q_1}{BK}=\frac{Q_1M_1}{M_1K}, \text{ откуда: } \frac{C_1P_1}{A_1Q_1}=\frac{P_1N.M_1K}{N_1K.Q_1M_1}=\text{постоянн.}$$

Это указываетъ, что, при условленномъ перемѣщеніи точки B, всякая новая прямая A_1C_1 проходитъ черезъ постоянную точку, лежащую на прямой P_1Q_1. Слѣдомъ этой постоянной точки будетъ пересѣченіе прямыхъ NM и AC. Итакъ, перемѣщая точку B въ направленіи BD, находимъ, что сторона AC треугольника ABC проходитъ черезъ постоянную точку, лежащую на прямой MN. Перемѣстивъ теперь точку B въ направленіи, противоположномъ BD, должны будемъ взять новое положеніе для оси *yy* и убѣдимся такъ же, какъ и прежде, что, при обратномъ движеніи точки B, т. е. опять въ направленіи BD, точка пересѣченія новыхъ прямыхъ A_1C_1 и P_1Q_1 будетъ имѣть *постоянный слѣдъ*, по прежнему, на прямой MN. Если допустимъ, что этотъ постоянный слѣдъ отличенъ отъ прежде найденнаго, то, не измѣняя положенія (новаго) оси *yy* и перемѣстивъ точку B въ первоначальное положеніе, указанное на чертежѣ, должны будемъ признать, что постоянныя прямыя MN и AC имѣютъ двѣ общія точки. Слѣдовательно, при какомъ угодно положеніи точки B на прямой BD, сторона AC треугольника ABC, построеннаго извѣстнымъ образомъ, проходитъ черезъ постоянную точку на прямой MN.

В. Сикстель (Оренбургъ).

ИЗСЛѢДОВАНІЕ О МНОГОГРАННИКАХЪ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ.

А. БРАВЭ.

(*Переводъ съ французскаго*).

Предисловіе переводчика.

Въ области познанія матеріи однимъ изъ самыхъ глубокихъ вопросовъ является вопросъ о строеніи кристаллическаго вещества. Къ рѣшенію его подходятъ, особенно въ послѣднее время, не эмпирическимъ путемъ, а дедуктивнымъ. Чисто теоретическія построенія, нашедшія себѣ самое блестящее примѣненіе къ даннымъ, экспериментально добытымъ, открываютъ предъ нами новые и чрезвычайно широкіе горизонты. До извѣстной степени основаніе этому плодотворному и увлекательному методу и во всякомъ случаѣ геніальное развитіе его далъ Августъ Бравэ.

Не смотря на всѣ высокія достоинства трудовъ А. Бравэ, они остались неизвѣстными даже на его родинѣ, по поводу чего Е. Мал-

ларъ въ своемъ введеніи къ учебнику кристаллографіи высказываетъ совершенно справедливое удивленіе. Пожалуй, и теперь, когда имя Бравэ поставлено на должную высоту въ области кристаллографіи, нѣтъ еще достаточнаго знакомства съ его работами, чего послѣднія вполнѣ заслуживаютъ.

Имѣя въ виду, если обстоятельства позволятъ, охватить вопросъ объ исторіи воззрѣній на структуру кристалловъ съ болѣе широкой точки зрѣнія, мы покуда ограничиваемся переводомъ статьи А. Бравэ: „Mémoire sur les polyèdres de forme symétrique“ (Journal de mathématiques pures et appliquées par J. Liouville, T. XIV, année 1894). Мы остановились именно на этомъ изслѣдованіи „О многогранникахъ симметрической формы“, какъ на болѣе раннемъ трудѣ А. Бравэ, служащемъ до извѣстной степени введеніемъ къ дальнѣйшимъ, можетъ быть, болѣе совершеннымъ произведеніямъ талантливаго ученаго. Сильное подтвержденіе цѣлесообразности нашего выбора мы усматриваемъ также въ томъ обстоятельствѣ, что именно это сочиненіе „Mémoire sur les polyèdres de forme symétrique“ вошло въ серію изданій „Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschaften“, причемъ переводъ на нѣмецкій языкъ сдѣланъ спеціалистами въ области вопросовъ кристаллической структуры Ц. и Е. Блазіусами, при участіи одного изъ лучшихъ кристаллографовъ нашего времени П. Грота.

Весь этотъ мемуаръ Августа Бравэ представляетъ стройное, гармоничное и неразрывное цѣлое. Мы смѣемъ думать, что чтеніе этого изслѣдованія, какъ таковаго, помимо какихъ бы то ни было дальнѣйшихъ приложеній его, можетъ доставить истинное удовольствіе всякому, склонному къ математическому мышленію.

Что касается личности А. Бравэ, то она въ большинствѣ случаевъ совершенно неизвѣстна даже спеціалистамъ; между тѣмъ знакомство съ жизнью человѣка, столь высоко и разносторонне одареннаго, было бы вполнѣ естественно и желательно. Въ виду этого мы позволяемъ себѣ привести здѣсь краткую біографію А. Бравэ, почерпнутую нами изъ глубоко прочувствованнаго „Éloge historique d'Auguste Bravais“, принадлежащаго перу знаменитаго Эли-де-Бомона (Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut Impérial de Françe, T. XXXV, Année 1866).

Августъ Бравэ родился 23 августа 1811 года въ Annonay (департ. l'Ardèche), маленькомъ городкѣ, живописно расположенномъ въ ущельи хребта Vivarais. Отецъ Августа Бравэ былъ докторомъ медицины. Въ теченіе сорока лѣтъ онъ исполнялъ безвозмездно обязанности госпитальнаго врача и въ старости практиковалъ только среди бѣдныхъ. Кромѣ врачебныхъ занятій, отецъ Бравэ со страстью предавался занятіямъ ботаникой. Онъ находился въ постоянной перепискѣ и обмѣнивался сѣменами и образцами растеній съ самыми знаменитыми ботаниками Парижа и Монпелье. Семья Бравэ была довольно многочисленна: 4 сына и одна дочь. Самымъ младшимъ изъ сыновей былъ Августъ Бравэ, впослѣдствіи знаменитый ученый.

Августъ Бравэ лишился своей матери въ раннемъ дѣтствѣ. Трехъ лѣтъ маленькій Августъ выучился уже читать, не замѣчая даже, какъ это случилось. Самымъ любимымъ занятіемъ его было рвать цвѣты вмѣстѣ съ сестрой, собирать камешки, красивыхъ насѣкомыхъ. Это

были лучшія игрушки его дѣтскихъ лѣтъ. Вскорѣ онъ былъ уже въ состояніи принимать участіе въ прогулкахъ своихъ старшихъ братьевъ. Каждый разъ, когда занятія позволяли, самъ докторъ Бравэ руководилъ экскурсіями своихъ сыновей. Трогательную картину представляла эта молодая семья, озабоченная составленіемъ различныхъ коллекцій, подъ наблюденіемъ и присмотромъ главы семьи, одновременно отца и учителя. Различные предметы давали тему для серьезныхъ и поучительныхъ бесѣдъ, которыя отецъ велъ съ большимъ увлеченіемъ, и такимъ образомъ подстрекалъ еще больше рвеніе дѣтей къ подобнымъ занятіямъ и воспитывалъ въ нихъ осмысленную любовь къ природѣ.

Молодой Августъ обнаруживалъ съ самыхъ раннихъ лѣтъ большую наблюдательность. Еще ребенкомъ онъ чрезвычайно внимательно слѣдилъ за всѣми атмосферными явленіями. Каждое утро наблюдалъ онъ съ террасы небо, вѣтеръ, облака. Позднѣе онъ устроилъ себѣ на балконѣ маленькую обсерваторію, откуда обращалъ вниманіе всей семьи на тысячу явленій, которыя безъ его указаній прошли бы совершенно незамѣченными. На горизонтѣ отцовскаго дома виднѣлась гора, Roche de Vent, правда, не очень высокая, но достаточная, чтобы служить до нѣкоторой степени барометромъ. Облака, сгущающіяся у этой горы, слѣды снѣга, укутывающій ее туманъ играли большую роль въ жизни ребенка. Гора эта также служила часто цѣлью экскурсій дѣтей, хотя подъемъ на нее и спускъ продолжались часа четыре.

Старшіе братья Августа часто отправлялись на болѣе высокую гору, Pilat, откуда они приносили новые цвѣты, особенныхъ насѣкомыхъ и передавали интересные разсказы о восходѣ солнца за Монбланомъ. И находки братьевъ, и ихъ описанія сильно дѣйствовали на воображеніе молодого А. Бравэ, но онъ былъ еще слишкомъ молодъ для такихъ прогулокъ: одинъ подъемъ на вершину долженъ былъ продолжаться часовъ пять—шесть. Тогда Августъ—одинъ, тайкомъ взобрался на вершину горы, а на слѣдующій день явился уже со столь желанными растеніями, камнями, насѣкомыми и съ увлеченіемъ передавалъ о томъ, какъ солнце за Монбланомъ вырисовывало длинную цѣпь Альпійскихъ горъ. Въ зародышѣ въ немъ сказался уже будущій знаменитый путешественникъ.

Рядомъ съ этою наблюдательностью и любовью къ природѣ у него еще съ дѣтства обнаружились острый умъ и серьезная вдумчивость. Знакомые, посѣщавшіе семью Бравэ, не рѣдко обращали вниманіе на ребенка, погруженнаго въ глубокія размышленія; на вопросы, обращаемые къ нему по этому поводу, мальчикъ отвѣчалъ съ очаровательною наивностью: „je penseé“.

14-ти лѣтъ онъ уже закончилъ свои занятія въ collége d'Annonay. Тогда отецъ Августа рѣшилъ послать его въ Парижъ, въ collége Stanislas. Скромный и послушный, онъ привлекъ къ себѣ общія симпатіи. Бравэ ревностно посѣщалъ уроки, внимательно слѣдилъ за объясненіями въ классѣ, точно приготовлялъ заданное, но самыя глубокія его симпатіи были не здѣсь. На днѣ его чемодана хранилось нѣсколько книгъ, скрытыхъ отъ постороннихъ взоровъ. Это были математическія книги. Ночью онъ находилъ возможность перелистывать ихъ. Онъ рѣшалъ задачи и писалъ весьма интересныя письма Рейно, бывшему учителю

ариѳметики и геометріи въ collège d'Annonay.—Мальчика рѣшено было приготовлять къ поступленію въ Политехническую школу. Проведя два года въ Парижѣ, онъ вернулся въ Annonay, гдѣ занятіями его снова сталъ руководить Рейно. Приготовленія продолжались всего одинъ годъ. Въ 1828 г. Августъ держалъ вступительный экзаменъ. Оказалось, что подготовка была слишкомъ поспѣшна: Бравэ не былъ принятъ.

Къ счастью для юноши и для науки, экзаменаторъ его, Бурдонъ, былъ человѣкъ, внимательно относившійся къ являющимся молодымъ людямъ; онъ констатировалъ недостаточность подготовки, но отъ него не ускользнули выдающіяся дарованія Бравэ. Бурдонъ вызвалъ доктора Бравэ, выяснилъ ему положеніе дѣла и настойчиво совѣтовалъ прислать сына къ экзаменамъ на слѣдующій годъ. Вполнѣ убѣжденный доводами Бурдона, Бравэ послалъ своего сына снова въ Парижъ въ институтъ Barbet, который считался тогда самымъ лучшимъ учебнымъ заведеніемъ для подготовленія къ поступленію въ Политехническую школу. Къ концу года на общемъ конкурсѣ Бравэ получилъ первую отмѣтку по математикѣ и былъ принятъ вторымъ въ Политехническую школу. Вскорѣ онъ занялъ первое мѣсто по успѣхамъ въ занятіяхъ.

По окончаніи курса, Бравэ, съ согласія своего отца, вступилъ въ морскую службу. Море имѣло для Бравэ особенное обаяніе. Здѣсь представлялась возможность посмотрѣть отдаленныя страны, познакомиться съ самой разнообразной природой и продолжать съ бо́льшимъ запасомъ свѣдѣній, ея изученіе; а это составляло лучшую мечту его счастливаго дѣтства.

Проплававъ нѣкоторое время, съ начала 1832 г., въ водахъ Средиземнаго моря, онъ вскорѣ перешелъ на судно — le Loiret, которому поручено было изслѣдованіе береговъ Алжира. Въ октябрѣ 1833 г. судно, выполнивши возложенное порученіе, вошло въ гавань Тулона. Морской министръ, довольный результатами экспедиціи, выразилъ благодарность командиру и его помощникамъ, особенно Бравэ.

Затѣмъ le Loiret назначено было для сообщеній между Алжиромъ, Бономъ и Ораномъ, причемъ оно было вооружено, въ виду непріязненныхъ дѣйствій прибрежныхъ жителей. Продолжая службу на le Loiret, Бравэ былъ произведенъ въ лейтенанты 1 февраля 1834 г.—Въ безпрерывныхъ переѣздахъ судно дѣлало частыя остановки въ различныхъ портахъ. Бравэ при всякой возможности отправлялся на сушу, что давало ему драгоцѣнный случай удовлетворить своему страстному влеченію къ изученію природы. Растительный и животный міръ, значительно отличающійся отъ того, къ которому онъ привыкъ съ дѣтства, возбуждалъ его любознательность въ чрезвычайной степени. Бравэ собралъ великолѣпныя коллекціи растеній, насѣкомыхъ, ракообразныхъ, рыбъ, наземныхъ и морскихъ моллюсокъ. Онъ отправлялъ большія посылки въ Annonay или самъ привозилъ ихъ, пользуясь всякимъ отпускомъ для поѣздки на родину.

Находясь въ Annonay, онъ снова принимался за экскурсіи на Pilat и Roche de Vent, выбирая самыя уединенныя и заброшенныя тропинки. Интересуясь палеонтологіей, онъ собралъ здѣсь богатую коллекцію ископаемыхъ. Но большую часть времени онъ отдавалъ занятіямъ ботаникой, экскурсируя со своимъ братомъ Людвигомъ Бравэ,

докторомъ медицины и уже опытнымъ ботаникомъ. Вдвоемъ Людвигъ и Августъ Бравэ написали изслѣдованіе: „Essai géométrique sur la simétrie de feuilles curvésirées et rectiseriées“, представленное ими въ Академію наукъ въ 1835 г. Хотя оказалось, что вопросъ этотъ очень не задолго былъ разработанъ другими авторами, чего братья, конечно, не знали, но рецензія, сдѣланная Броньяромъ по порученію Академіи, содержитъ очень лестный отзывъ о трудѣ братьевъ. Съ особенной похвалой отозвался Броньяръ о чрезвычайно умѣломъ и остроумномъ пользованіи непрерывными дробями, сходящимися рядами и другими математическими выкладками, а эта часть изслѣдованія всецѣло принадлежала Августу Бравэ. Л. и А. Бравэ написали вмѣстѣ еще нѣсколько работъ, обратившихъ на себя вниманіе серьезныхъ ученыхъ. Декандолль посвятилъ братьямъ новый видъ семейства Bignoniaceae, подъ названіемъ Bravaisia.

Не оставались безрезультатными и изслѣдованія, производимыя въ эти же годы Авг. Бравэ въ Алжирѣ. Благодаря различнымъ его находкамъ, онъ вступилъ въ оживленную переписку со многими учеными, и ихъ отзывы о его трудахъ еще удваивали усердіе молодого изслѣдователя. Въ это же время, 12 августа 1836 г., ему приходится, во главѣ 37 матросовъ, участвовать въ стычкѣ съ арабами. Товарищи по службѣ передаютъ съ восторгомъ о храбрости и распорядительности Августа Бравэ. Необыкновенная скромность Бравэ, помѣшавшая ему получить вполнѣ заслуженную награду, возбудила еще большую симпатію и уваженіе окружавшихъ его.

Природа щедро одарила Бравэ. Отличный морской офицеръ, страстный естествоиспытатель, онъ былъ вмѣстѣ съ тѣмъ, по выраженію Коши, авторитетъ котораго въ данномъ случаѣ несомнѣненъ, истиннымъ геометромъ. Какъ раньше въ школѣ, теперь въ каютѣ судна, онъ проводилъ ночи за математическими выкладками и рѣшеніями поставленныхъ себѣ задачъ. Между другими математическими трудами, написанными на суднѣ, выдаются „Méthodes employées dans les levés sous voiles“ и „Équilibre des corps flottans“, которыя были представлены А. Бравэ въ Ліонскій университетъ. За эти сочиненія онъ удостоился полученія степени docteur-ès-sciences.—Пуассонъ, который еще послѣ окончательнаго экзамена Бравэ въ Политехнической школѣ совѣтовалъ молодому человѣку посвятить себя исключительно научной карьерѣ, теперь особенно настаивалъ на этомъ. Около этого же времени А. Бравэ представилъ въ Академію наукъ нѣсколько математическихъ мемуаровъ, возбудившихъ къ себѣ самое серьезное вниманіе Пуассона, Штурма, Савари.

Морской министръ, желая дать возможность талантливому Бравэ, заниматься наукой не только урывками, назначилъ его въ чисто научную экспедицію на сѣверъ. — 13-го іюня 1838 г. корветъ „la Recherche“ вышелъ изъ Гаврской гавани. На немъ находилось нѣсколько ученыхъ и всѣ инструменты, необходимые для будущихъ изслѣдованій. Корветъ остановился въ Дронтгеймѣ, древней норвежской столицѣ, гдѣ къ находящимся на суднѣ примкнули норвежскіе, шведскіе и датскіе ученые. Послѣ небольшой остановки въ Гаммерфестѣ „la Recherche“ бросилъ якорь 25 іюля вблизи Шпицбергена, подъ 70°30′ сѣв. ш. — Ученые и

морскіе офицеры немедленно принялись за работу. Явленія астрономическія, физическія, метеорологическія, движенія и температура моря, огромные ледники, спускающіеся съ вершинъ горъ до уровня морского, геологическое строеніе обнаженій, слѣды растительности—все это служило предметомъ многочисленныхъ изслѣдованій. А. Бравэ, съ дѣтства привыкшій взбираться на горы, первый достигъ ледниковой вершины, названной его именемъ. Бравэ съ товарищами занялся опредѣленіями высотъ горъ, наклоненіемъ магнитной стрѣлки и др.

Но лѣто подъ такими широтами не продолжительно. 5 августа былъ данъ сигналъ къ отплытію. 12 авг. корветъ снова прибылъ въ Гаммерфестъ. Во время переѣзда Бравэ и Мартэнъ сдѣлали интересныя наблюденія надъ температурой воды Ледовитаго океана на различныхъ глубинахъ. Въ Гаммерфестѣ Бравэ съ однимъ изъ своихъ товарищей по службѣ и два профессора, шведскій и норвежскій, высадились, чтобы прозимовать въ Лапландіи. Корветъ возвратился въ Брестъ.

По причинѣ извѣстныхъ климатическихъ условій сѣверная часть Атлантическаго океана въ теченіе зимы бываетъ окутана густымъ, не прекращающимся туманомъ, который совершенно скрываетъ небо отъ прибрежныхъ жителей. Въ виду этого, высадившіеся въ Гаммерфестѣ рѣшили не оставаться тамъ, а переѣхать въ деревеньку Боссекопъ, углубившуюся на 70 километровъ внутрь страны, благодаря чему климатъ тамъ холоднѣе, но за то небо несравненно яснѣе, чѣмъ у береговъ океана.

1-го сентября они основались уже въ Боссекопѣ и установили свои многочисленные инструменты: телескопы, теодолиты, огромные буссоли, барометры, термометры, актинометры, пиргеліометры и др. Маленькій деревянный домъ, купленный ими, былъ обращенъ въ астрономическую обсерваторію; пять сосѣднихъ хижинъ сдѣлались обсерваторіями метеорологическими, магнитными... Боссекопъ расположенъ подъ $69^0 58'$ с. ш., т. е. на $3^0 25'$ сѣвернѣе полярнаго круга. Съ середины ноября стала показываться только верхняя часть солнечнаго диска. Съ 17 ноября солнце совершенно скрылось. Въ теченіе нѣкотораго времени еще южный горизонтъ къ полудню прояснялся слабымъ сумеречнымъ свѣтомъ, но вскорѣ и этотъ свѣтъ исчезъ. Воцарилась безразсвѣтная ночь. Только 31 января показался кончикъ солнечнаго диска. Первые лучи, брошенные солнцемъ на землю, были привѣтствованы народомъ, расположившимся на крышахъ и холмахъ, криками восторга. Началось празднованіе „пробужденія солнца“ отъ сна, продолжавшагося около $2^1/_2$ мѣсяцевъ.—Постоянный день полярнаго лѣта имѣлъ уже издавна своихъ наблюдателей, но для ожиданія празднованія „пробужденія солнца“ въ Боссекопѣ нужно было имѣть много мужества и много горячей любви къ наукѣ.

Всѣ метеорологическіе элементы Боссекопа были тщательно собраны нашими изслѣдователями, производившими наблюденія каждые два часа, а иногда и ежечасно, и опубликованы въ огромномъ трудѣ сѣверной научной экспедиціи. Четыре наблюдателя распредѣлили между собой время труда и отдыха. Когда же случалось особенно интересное явленіе, когда, напр., полярное сіяніе являлось въ особенномъ блескѣ, тогда уже никто не думалъ объ отдыхѣ. Нѣсколько глотковъ кофе

должны были бороться со сномъ, особенно властнымъ среди постоянной полярной ночи. Одни слѣдили за пертурбаціями магнитной стрѣлки и опредѣляли положеніе ея каждыя пять минутъ. Другіе на чистомъ воздухѣ опредѣляли различные фазисы явленія и измѣряли высоту надъ горизонтомъ. Металлическія части ихъ инструментовъ на столько охлаждались, что пришлось покрывать ихъ сукномъ, иначе кожа пальцевъ моментально приклеивалась къ металлу.—Кромѣ участія въ этой общей работѣ А. Бравэ успѣлъ написать еще въ это время: „Mémoire sur les aurores boréales", который высоко цѣнился самыми компетентными въ этой области судьями.

Послѣ семимѣсячнаго пребыванія въ Боссекопѣ, наблюдатели отправились 19 апрѣля 1839 г. въ Гаммерфестъ, гдѣ имъ предстояло еще закончить различныя работы и ждать прихода корвета, который долженъ былъ вторично отвезти ихъ на Шпицбергенъ.—Сѣверная природа съ удивительной, ей одной свойственной быстротою внезапно ожила. Бравэ не могъ противостоять желанію позаняться ботаникой. Къ несчастью, собираясь сорвать какой-то цвѣтокъ надъ ущельемъ скалы, онъ оступился и поломалъ себѣ колѣно. Въ теченіе нѣсколькихъ недѣль онъ долженъ былъ оставаться неподвижнымъ. Пришелъ корветъ. Всѣ товарищи Бравэ перешли на la Recherche. Онъ одинъ долженъ былъ оставаться въ Гаммерфестѣ до конца лѣта. Не падая духомъ, не смотря на это непріятное стеченіе обстоятельствъ, Бравэ продолжалъ работать: производилъ метеорологическія и магнитныя наблюденія и затѣмъ собиралъ матеріалъ, на сколько это ему позволяло здоровье, для своихъ двухъ большихъ работъ: о морскихъ приливахъ и о древнемъ уровнѣ моря.

Такой образъ жизни велъ А. Бравэ до возвращенія корвета въ Гаммерфестъ. Здѣсь ученые снова раздѣлились, уже въ послѣдній разъ, на маленькія группы. Бравэ, не смотря на неполное свое выздоровленіе, присоединился къ доктору Мартэну, чтобы слѣдовать сухимъ путемъ. Измѣряя различныя высоты, собирая растенія и т. д. прошли они Лапландское плато. Глухіе шведскіе лѣса доставляли богатый матеріалъ для ихъ ботаническихъ наблюденій, результатомъ которыхъ было, между прочимъ, появленіе „изслѣдованія о ростѣ Pinus sylvestris". Въ Стокгольмѣ они провѣрили свои инструменты, и затѣмъ такая провѣрка производилась во всѣхъ большихъ городахъ, встрѣчавшихся имъ по пути до Парижа, куда они прибыли въ январѣ 1840 г. Морской минстръ поручилъ Бравэ обработать для печати весь добытый матеріалъ по физикѣ.

Выполненіе этого порученія не требовало постояннаго пребыванія Бравэ въ Парижѣ; считалось возможнымъ совмѣстить это занятіе съ преподавательскою дѣятельностью въ какомъ-нибудь университетѣ. 1 февраля 1841 г. онъ былъ назначенъ профессоромъ прикладной математики въ Ліонскомъ университетѣ. Приготовленіе курса не помѣшало Бравэ написать въ это же время нѣсколько выдающихся астрономическихъ работъ. Съ двумя товарищами онъ основалъ въ Ліонѣ гидрометрическое общество. Въ теченіе трехъ лѣтъ Бравэ редактировалъ изданіе „Patria", для котораго написалъ нѣсколько статей по географіи, физикѣ и пр., отличающихся удивительно яснымъ и точнымъ изложе-

ніемъ.—Ліонъ находится вблизи Савойи и Швейцаріи, которыя должны были, безъ сомнѣнія, привлечь вниманіе Бравэ. Предпринимается цѣлый рядъ экскурсій, обогатившихъ науку самыми разнообразными и серьезными данными: производятся метеорологическія наблюденія, ботаническія изслѣдованія, наблюденія надъ сумеречной дугой и вычисленіе высоты атмосферы, измѣряется температура кипѣнія воды при различныхъ давленіяхъ, скорость распространенія звука и проч. Не довольствуясь этимъ, Бравэ задумывается надъ восхожденіемъ на Монбланъ. Первый физикъ, взошедшій на Монбланъ 3-го августа 1787 г. былъ Соссюръ. Съ этого времени физика, быстро прогрессируя, стала задавать все новые и новые вопросы въ этой области, и наблюденія надъ различными феноменами болѣе совершенными инструментами должны были считаться очень желательными. Вторыми учеными, взобравшимися на Монбланъ, были Бравэ съ двумя товарищами. Большое наслажденіе можетъ доставить чтеніе тѣхъ страницъ, въ которыхъ А. Бравэ описываетъ свою экскурсію на Монбланъ. Для всего, сдѣланнаго отважными путешественниками нужно было много любви къ наукѣ, къ природѣ, много умѣнія переносить самыя разнообразныя лишенія...

Вскорѣ Бравэ принужденъ былъ оставить Ліонъ, потому что началось печатаніе трудовъ сѣверной экспедиціи. Товарищи высказывали большое сожалѣніе, такъ какъ успѣли очень полюбить А. Бравэ, дѣйствительно, привлекавшаго къ себѣ своими нравственными достоинствами. У него былъ веселый и вмѣстѣ съ тѣмъ вдумчивый характеръ. Добрый, мягкій и безкорыстный Бравэ былъ прекраснымъ товарищемъ, всегда готовымъ подать совѣтъ, если къ нему обращались. Къ своимъ обязанностямъ онъ относился съ скрупулезной точностью. Курсъ его привлекъ многихъ слушателей. Онъ умѣлъ оживить, придать особенный интересъ, особенный смыслъ самому сухому математическому вопросу.

Около этого времени совѣтъ Политехнической школы предлагаетъ Бравэ занять каѳедру физики. Приготовленіе новаго, обширнаго курса придало нѣсколько особенный характеръ его трудамъ. Въ эту пору появляются его глубокомысленныя сочиненія по атмосферной оптикѣ (радуга) и молекулярному строенію тѣлъ. — Уже въ предыдущихъ работахъ ему часто приходилось касаться кристаллическихъ тѣлъ; особенно много соображеній по поводу кристалловъ (льда) было высказано имъ въ послѣдней работѣ о радугѣ. Вскорѣ кристаллографія привлекаетъ его все больше и больше; и онъ создаетъ на этомъ поприщѣ труды, которымъ суждено было стать безсмертными. Одна за другой появляются такія блестящія работы, какъ „Note sur les polyèdres symétriques de la géométrie“, „Mémoire sur les polyèdres de forme symétrique“ (Journ. de mathématiques, T. XIV), „Mémoire sur les systèmes, formés par des points“. (Journ. de l'école polytechnique, T. XIX), „Etudes cristallographiques“ (J. de l'école polytechn., T. XX).

Въ началѣ 1854 г. въ Академіи наукъ, въ секціи географіи и мореплаванія, освободилось мѣсто, на которое былъ избранъ А. Бравэ. Не разъ приходилось академикамъ выслушивать серьезные и важные доклады своего молодого товарища.

Казалось, что въ Бравэ нѣтъ никакой перемѣны, что онъ также бодръ и энергиченъ, но семейныя несчастія, имѣвшія мѣсто въ это

время, наложили на него глубокій отпечатокъ.—Въ 1847 г. А. Бравэ женился на любимой имъ дѣвушкѣ. Счастливый въ своей брачной жизни, онъ особенно энергично работалъ въ эти годы. Но въ 1853 г., за годъ до избранія А. Бравэ въ академики, умираетъ его отецъ, а затѣмъ черезъ самый короткій срокъ умираетъ его единственный сынъ. Этотъ послѣдній ударъ былъ роковымъ для А. Бравэ. Желая заглушить тоску, онъ предается самымъ усиленнымъ занятіямъ и не хочетъ знать отдыха. Нарушенія гигіеническихъ правилъ, когда онъ проводилъ ночи напролетъ за занятіями математикой въ каютѣ la Loiret, мало чѣмъ сказывались на здоровомъ, молодомъ организмѣ; теперь же въ болѣе зрѣломъ возрастѣ, при подавленномъ нравственномъ состояніи, такое пренебрежительное отношеніе къ своему здоровью имѣло самыя пагубныя послѣдствія. Бравэ сталъ страдать безсонницей. Работа не давалась уже ему какъ прежде. Память его слабѣла все больше и больше. Онъ съ ужасомъ видѣлъ, что умъ его, еще такъ недавно смѣлый и блестящій, меркнетъ со дня на день. Вскорѣ пришлось прекратить преподаваніе въ Политехнической школѣ и оставить Академію. Обнаружилась мозговая болѣзнь, сопровождаемая сильными страданіями, которыя Бравэ переносилъ съ удивительнымъ терпѣніемъ. Жена отвезла его въ Версаль, надѣясь, что спокойная сельская жизнь поправитъ разстроенное здоровье мужа.

Физически Бравэ былъ достаточно бодръ. Каждый день онъ отправлялся на прогулку, часто въ сопровожденіи своихъ друзей. Но память совсѣмъ оставила его: онъ не узнавалъ ни предметовъ, ни лицъ, окружавшихъ его. Какую грустную картину представлялъ этотъ свѣтлый, острый умъ, преждевременно и невозвратно померкшій! 30 марта 1863 г. А. Бравэ скончался.

Як. Самойловъ (Одесса).

(*Продолженіе слѣдуетъ*).

ОЧЕРКЪ

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЛОБАЧЕВСКАГО.

(Продолженіе).*

Пусть искомое уравненіе будетъ:

$$Me^{x} + Ne^{-x} = P\cos y'. \qquad (38, a)$$

Условія перпендикулярности выразятся уравненіями:

$$2MB_1 + 2NA_1 = C_1P, \qquad (38, b)$$

$$2MA_2 + 2NA_2 = C_2P. \qquad (38, c)$$

Исключая изъ этихъ трехъ уравненій (38) M,N и P, находимъ уравненіе требуемой прямой:

*) См. „Вѣстн. Оп. Физики“ №№ 174, 178, 179, 183, 187, 188, 189, 190, 194, 195 196, 198, 199, 201, 202, 203, 206, 207 и 209.

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & \cos y' \\ 2B_1 & 2A_1 & C_1 \\ 2B_2 & 2A_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{XLVII}$$

Для того, чтобы это уравненіе выражало дѣйствительную прямую, необходимо и достаточно (согласно условію 19), чтобы

$$(A_1B_2-A_2B_1)^2-(B_1C_2-B_2C_1)(A_2C_1-A_1C_2)>0.$$

Сличая это съ неравенствомъ XLIV a), мы видимъ, что оно выражаетъ условіе, необходимое и достаточное для того, чтобы прямыя были расходящимися. Мы приходимъ такимъ образомъ и здѣсь къ выводамъ, которые находятся въ полномъ согласіи съ синтетической теоріей.

Займемся теперь вычисленіемъ кратчайшаго разстоянія между двумя расходящимися прямыми.

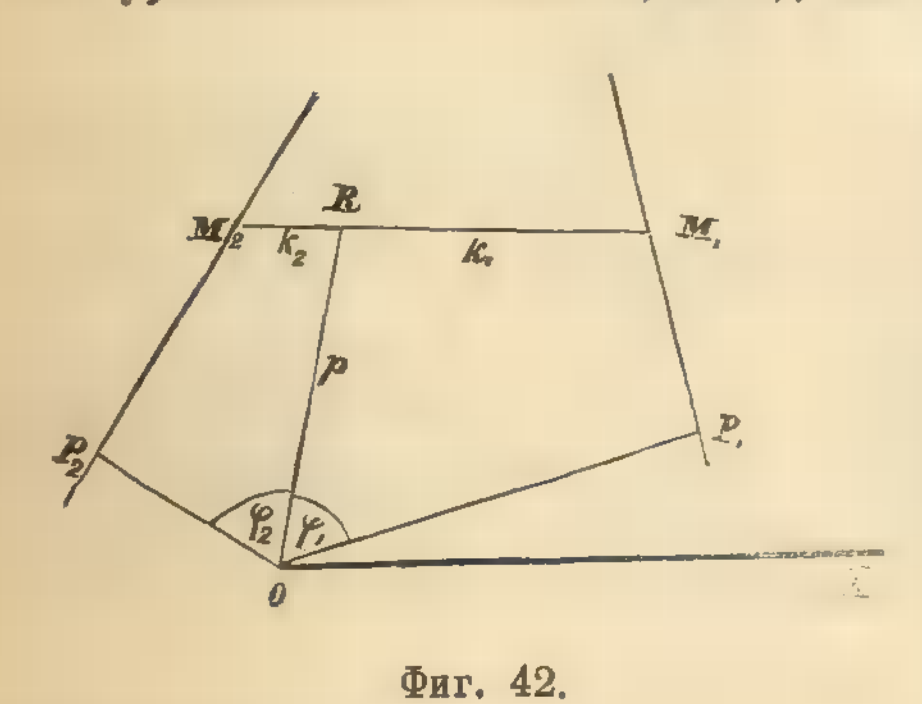
Пусть OX будетъ ось X-овъ M_1P_1 и M_2P_2 (фиг. 42) наши прямыя, M_1M_2 кратчайшее разстояніе между ними. Для параметровъ прямыхъ сохранимъ прежнее обозначеніе: q_1, q_2, ω_1 и ω_2. Нашъ чертежъ предполагаетъ, что начало координатъ расположено между данными прямыми. Изъ начала координатъ опускаемъ перпендикуляръ OR на M_1M_2; мы получимъ два четырехугольника съ тремя прямыми углами въ каждомъ. Обозначимъ для краткости перпендикуляръ OR черезъ p, отрѣзки M_1R и M_2R черезъ k_1 и k_2, углы ROP_1 и ROP_2 черезъ φ_1 и φ_2. Произведя подстановку

$$\begin{bmatrix} a & c & d & A \\ q_1 & k_1 & p & \varphi_1 \end{bmatrix}$$

въ уравненіяхъ XXXV i) и k), мы найдемъ:

$$\sin k'_1=\frac{\sin q'_1}{\sin\varphi_1} \qquad (39, a)$$

$$\cos p'=\frac{\cos\varphi_1}{\cos q_1'}. \qquad (40, a)$$



Фиг. 42.

Такимъ же образомъ найдемъ.

$$\sin k'_2=\frac{\sin q'_2}{\sin\varphi_2} \qquad (39, b)$$

$$\cos p'=\frac{\cos\varphi_2}{\cos q'_2}. \qquad (40, b)$$

Такимъ образомъ

$$\frac{\cos q'_1}{\cos\varphi_1}=\frac{\cos q'_2}{\cos\varphi_2}. \qquad (41)$$

Изъ уравненій (39 a) и (39, b) слѣдуетъ:

$$\cos k'_1\cos k'_2=\frac{\sqrt{(\sin^2\varphi_1-\sin^2 q'_1)(\sin^2\varphi_2-\sin^2 q'_2)}}{\sin\varphi_1\sin\varphi_2}. \qquad (42)$$

Числитель этого выраженія допускаетъ на основаніи уравненія (41) слѣдующія преобразованія:

$$\sqrt{(\sin^2\varphi_1-\sin^2 q'_1)(\sin^2\varphi_2-\sin^2 q'_2)}=\sqrt{(\cos^2 q'_1-\cos^2\varphi_1)(\cos^2 q'_2-\cos^2\varphi_2)}=$$

$$=(\cos^2 q'_1-\cos^2\varphi_1)\frac{\cos\varphi_2}{\cos\varphi_1}{}^{*)}=(\cos q'_1-\cos\varphi_1)(\cos q_1'+\cos\varphi_1)\frac{\cos\varphi_2}{\cos\varphi_1}=$$

$$(\cos q'_1-\cos\varphi_1)(\cos q_2+\cos\varphi_2)=\cos q'_1\cos q'_2-\cos\varphi_1\cos\varphi_2.$$

Имѣя это въ виду, мы найдемъ по формулѣ XVII a) съ помощью уравненій (39 a), (39 b) и (42)

$$\sin k'=\sin(k_1+k_2)'=\frac{\sin k'_1\sin k'_2}{1+\cos k'_1\cos k'_2}=$$

$$=\frac{\sin q'_1\sin q'_2}{\sin\varphi'_1\sin\varphi'_2+\cos q'_1\cos q'_2-\cos\varphi_1\cos\varphi_2}=\frac{\sin q'_1\sin q'_2}{\cos q'_1\cos q'_2-\cos(\omega_2-\omega_1)},$$

такъ какъ $\varphi_1+\varphi_2=\omega_2-\omega_1$.

Такъ какъ это выраженіе совпадаетъ съ выраженіемъ XLV a), то мы получимъ послѣ надлежащей замѣны, какъ и тамъ:

$$\sin k'=\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\,E_1E_2}{2(A_1B_2+A_2B_1)-C_1C_2}. \qquad \text{XLVIII } b)$$

Повторивъ эту передѣлку почти буквально при иномъ расположеніи чертежа, мы убѣдимся, что въ этомъ выраженіи для $\sin k'$ нужно только перемѣнить знакъ въ томъ случаѣ, если начало не расположено между двумя прямыми.

Сличая уравненія XLV и XLVIII, мы замѣчаемъ слѣдующее: если мы въ уравненіи XLV выразимъ $\cos\vartheta$ въ показательныхъ функціяхъ и замѣнимъ ϑ черезъ $\frac{k}{i}$, то мы получимъ уравненія XLVIII, такъ что аналитически мы можемъ смотрѣть на расходящіяся прямыя, какъ на пересѣкающіяся подъ мнимымъ угломъ. Но нужно, конечно, помнить, что въ этомъ утвержденіи заключается только чисто аналитическій фактъ, въ силу котораго мы можемъ переходить отъ пересѣкающихся прямыхъ къ непересѣкающимся, замѣняя уголъ между ними черезъ $\frac{k}{i}$, гдѣ k ихъ кратчайшее разстояніе.

Мы нашли выше условія, необходимыя и достаточныя для того, чтобы три точки лежали на одной прямой. Опредѣлимъ еще условія, при которыхъ три прямыя проходятъ черезъ одну точку. Пусть уравненія нашихъ прямыхъ будутъ:

---

*) При извлеченіи корня нужно имѣть въ виду, что $q' < \varphi$, такъ что $\cos^2 q'_1-\cos^2\varphi_1>0$.

$$A e^{x} + B e^{-x} = C \cos y'$$

$$A_1 e^{x} + B_1 e^{-x} = C_1 \cos y' \qquad \text{(XL)}$$

$$A_2 e^{x} + B_2 e^{-x} = C_2 \cos y'$$

Исключая e^x, e^{-x} и $\cos y'$ изъ этихъ уравненій мы найдемъ условіе:

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{XLIX}$$

необходимое и достаточное для того, чтобы значенія этихъ функцій, удовлетворяющія двумъ изъ этихъ уравненій, удовлетворяли также третьему. Это условіе, необходимое для того, чтобы три прямыя проходили черезъ общую точку, но не достаточное: для этого требуется еще, чтобы этимъ общимъ значеніямъ функцій соотвѣтствовали дѣйствительныя и конечныя значенія аргументовъ x и y, т. е. чтобы двѣ изъ этихъ прямыхъ пересѣкались. Если двѣ изъ этихъ прямыхъ параллельны, но не параллельны оси, то два соотвѣтствующія уравненія удовлетворяются конечными значеніями для e^x, e^{-x} (см. выр. 37) и $\cos y' = \pm 1$ (чему соотвѣтствуетъ $y = \pm\infty$). Но при наличности условія XLIX эти величины удовлетворяютъ и третьему уравненію. Иными словами третья прямая параллельна двумъ первымъ. Если двѣ прямыя параллельны оси абсциссъ, но не совпадаютъ, такъ что напримѣръ, $A_2 = A_1 = 0$, а $B_2C_1 - B_1C_2 \gtreqless 0$, то уравненіе XLIX обнаруживаетъ, что и $A = 0$, т. е. третья прямая и въ этомъ случаѣ параллельна двумъ первымъ. Остается разсмотрѣть случай, когда двѣ прямыя расходятся. Тогда третья прямая не можетъ сходиться съ одной изъ двухъ первыхъ ни въ конечной, ни въ безконечно удаленной точкѣ, ибо при такихъ условіяхъ и первыя двѣ прямыя сходились бы въ той же точкѣ. Пусть уравненіе общаго перпендикуляра для двухъ первыхъ прямыхъ будетъ

$$M e^{x} + N e^{-x} = P \cos y'. \qquad (44)$$

Тогда, какъ мы видѣли, (ур. XLVI)

$$2MB_1 + 2NA_1 = PC_1,$$

$$2MB_2 + 2NA_2 = PC_2.$$

Но при наличности условія XLIX эти уравненія влекутъ за собой слѣдующее:

$$2MB + 2NA = PC^{*}).$$

---

*) Такъ какъ при наличности этого условія величины 2M, 2N и C, удовлетворяющія уравненіямъ

$$B_1\xi + A_1\eta = C_1\zeta,$$

$$B_2\xi + A_2\eta = C_2,$$

должны также удовлетворять уравненію

$$B\xi + A\eta = C\zeta.$$

Это значитъ, что прямая (44) перпендикулярна и къ третьей прямой. Итакъ, если коэффиціенты уравненій трехъ прямыхъ связаны уравненіемъ XLIX, то эти прямыя либо сходятся въ одной точкѣ, конечной или безконечно удаленной, либо перпендикулярны къ одной и той же прямой.

Въ связи съ изложенными соображеніями находится слѣдующее замѣчаніе. Пусть

$$\mathfrak{A}_0 \equiv A_0e^x + B_0e^{-x} - C_0\cos y' = 0$$

$$\mathfrak{A}_1 \equiv A_1e^x + B_1e^{-x} - C_1\cos y' = 0$$

$$\mathfrak{A}_2 \equiv A_2e^x + B_2e^{-x} - C_2\cos y' = 0$$

будутъ уравненія трехъ прямыхъ, коэффиціенты которыхъ не обращаютъ въ нуль детерминантъ (XLIX) системы. Тогда лѣвая часть уравненія всякой прямой

$$\mathfrak{A} = Ae^x + Be^{-x} - C\cos y'$$

можетъ быть тождественно представлена въ видѣ

$$\mathfrak{A} = k_0\mathfrak{A}_0 + k_1\mathfrak{A}_1 + k_2\mathfrak{A}_2,$$

гдѣ k_1, k_2, k_3 суть корни уравненій

$$A = k_0A_0 + k_1A_1 + k_2A_2$$

$$B = k_0B_0 + k_1B_1 + k_2B_2$$

$$C = k_0C_0 + k_1C_1 + k_2C_2.$$

И потому уравненіе всякой прямой имѣетъ слѣдующій видъ:

$$k_0\mathfrak{A}_0 + k_1\mathfrak{A}_1 + k_2\mathfrak{A}_2 = 0. \qquad (45)$$

Если обозначимъ черезъ h_0, h_1, h_2, разстоянія точки x,y отъ прямыхъ

$$\mathfrak{A}_0 = 0,\ \mathfrak{A}_1 = 0,\ \mathfrak{A}_2 = 0,$$

а черезъ χ_0, χ_1, χ_2, функціи:

$$\chi_0 = \operatorname{cotg} h'_0,\ \chi_1 = \operatorname{cotg} h'_1,\ \chi_2 = \operatorname{cotg} h'_2,$$

то формула XLIII a) даетъ

$$\chi_0 = \frac{\vartheta_0\mathfrak{A}_0}{E_0\sin y'},\ \chi_1 = \frac{\vartheta_1\mathfrak{A}_1}{E_1\sin y'},\ \chi_2 = \frac{\vartheta_2\mathfrak{A}_2}{E_2\sin y'},$$

гдѣ ϑ_0, ϑ_1, ϑ_2 единицы, взятыя съ надлежащимъ знакомъ. Ввиду этого, уравненію (45) можно дать такой видъ:

$$\mu_0\chi_0 + \mu_1\chi_1 + \mu_2\chi_2 = 0, \qquad \text{L}$$

гдѣ

$$\mu_0 = \vartheta_0k_0E_0,\ \mu_1 = \vartheta_1k_1E_1,\ \mu_2 = \vartheta_2k_2E_2.$$

Величины χ_0, χ_1, χ_2 можно разсматривать, какъ трилинейныя координаты точки,—и въ этихъ координатахъ прямая выражается алгебраическимъ однороднымъ линейнымъ уравненіемъ. Отсюда возможность классификаціи кривыхъ по классамъ и т. д., какъ это указано H. Cox'омъ *).

Къ теоріи прямой примыкаетъ еще задача о разысканіи площади треугольника по даннымъ координатамъ трехъ его вершинъ $A(x_0,y_0)$, $B(x_1,y_1)$, $C(x_2,y_2)$. Мы воспользуемся для этого формулой XXXII, предложенной нами въ прошлой главѣ, придавъ ей предварительно при помощи уравненій XIX слѣдующій видъ:

$$\sin\frac{\Delta}{2}=\sqrt{\frac{\sin b'\sin c'(1-\sin a')}{2(1+\sin b')(1+\sin c')\sin a'}}\,\mathrm{cotg}\,h'_a.$$

По формулѣ XXXVIII a) мы имѣемъ:

$$\sin a'=\frac{\sin y'_1\sin y'_2\sin(x_2-x_1)'}{1-\cos y'_1\cos y'_2\sin(x_2-x_1)'}$$

$$\sin b'=\frac{\sin y'_2\sin y'_0\sin(x_0-x_2)'}{1-\cos y'_2\cos y'_0\sin(x_0-x_2)'} \qquad (46)$$

$$\sin c'=\frac{\sin y'_0\sin y'_1\sin(x_1-x_0)'}{1-\cos y'_0\cos y'_1\sin(x_1-x_0)'}.$$

Слѣдовательно, полагая

$$\varphi(1,2)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\sin(x_2-x_1)'}{1-\sin y'_1\sin y'_2\sin(x_2-x_1)'-\cos y'_1\cos y'_2\sin(x_2-x_1)'}} \qquad 47\ a)$$

$$\psi(1,2)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\sin(x_2-x_1)'}{1+\sin y'_1\sin y'_2\sin(x_2-x_1)'-\cos y'_1\cos y'_2\sin(x_2-x_1)'}} \qquad 47\ b)$$

мы найдемъ:

$$\sin\frac{\Delta}{2}=\sin y'_0\frac{\psi(0.2)\,\psi(1,0)}{\varphi(1,2)}\,\mathrm{cotg}\,h'_a.$$

Чтобы при помощи формулы XLIII получить $\mathrm{cotg}\,h'_a$ намъ нужно составить уравненіе прямой BC, которое имѣетъ видъ XLI, подставить координаты x_0,y_0 вмѣсто текущихъ координатъ и раздѣлить результаты на $\pm E$. Вычисленіемъ этого выраженія мы и займемся. Замѣтимъ для этого, что

$$A=e^{-x_1}\cos y'_2-e^{-x_2}\cos y'_1;\quad B=e^{x_2}\cos y'_1-e^{x_1}\cos y'_2$$

$$C=e^{x_2-x_1}-e^{x_1-x_2}=2\,\mathrm{cotg}(x_2-x_1)'$$

Отсюда получаемъ:

*) Homersham Cox. „Homogeneous Coordinates in the Jmaginary Geometry and their Application to Systems of Forces". The Quart. Journal of pure and applied Mathem. XVIII. XIX.

$$\frac{1}{4}E^2 = \operatorname{cotg}^2(x_2-x_1)' + \cos^2 y'_1 + \cos^2 y'_2 - \frac{2\cos y'_1 \cos y'_2}{\sin(x_2-x_1)'} =$$

$$= \frac{\cos^2(x_2-x_1)' + (\cos^2 y'_1 + \cos^2 y'_2)\sin^2(x_2-x_1)' - 2\cos y'_1 \cos y'_2 \sin(x_2-x_1)'}{\sin^2(x_2-x_1)} =$$

$$= \frac{[1-\cos y'_0 \cos y'_2 \sin(x_2-x_1)']^2 - \sin^2 y'_1 \sin^2 y'_2 \sin^2(x_2-x_1)'}{\sin^2(x_2-x_1)'}.$$

Отсюда

$$E = \frac{1}{\varphi(1,2)\psi(1,2)}.$$

Такъ что

$$\operatorname{cotg} h'_a = \pm \frac{\varphi(1,2)\psi(1,2)}{\sin y'_0} \begin{vmatrix} e^{x_0} & e^{-x_0} & \cos y'_0 \\ e^{x_1} & e^{-x_1} & \cos y'_1 \\ e^{x_2} & e^{-x_2} & \cos y'_2 \end{vmatrix}.$$

И слѣдовательно,

$$\sin\frac{\Delta}{2} = \pm\,\psi(1,2)\psi(2,0)\psi(0,1) \begin{vmatrix} e^{x_0} & e^{-x_0} & \cos y'_0 \\ e^{x_1} & e^{-x_1} & \cos y'_1 \\ e^{x_2} & e^{-x_2} & \cos y'_2 \end{vmatrix} \qquad \text{LI}$$

Знакъ этого выраженія долженъ быть выбранъ такимъ образомъ, чтобы $\sin\frac{\Delta}{2}$ имѣлъ положительное значеніе. Такъ какъ ни при какомъ конечномъ значеніи координатъ точекъ A, B и C ни одинъ изъ множителей ψ не можетъ обратиться въ 0, то эта формула возвращаетъ насъ къ уравненію XLI, если мы захотимъ съ ея помощью выразить условіе, при которомъ три точки расположены на одной прямой.

Мы ограничимся этимъ по отношенію къ теоріи прямой и займемся уравненіями простѣйшихъ кривыхъ.

В. Каганъ (Спб.).

(Продолженіе слѣдуетъ).

ПРОГРЕСЪ И НЕИЗВѢСТНОЕ *).

Среди безчисленныхъ работъ, непрерывное появленіе которыхъ составляетъ одну изъ наиболѣе характерныхъ чертъ нашего времени, есть такія, которыя по своей исключительной важности способны въ

*) Часть рѣчи, произнесенной президентомъ Парижской Академіи Наукъ Loewy въ торжественномъ годичномъ засѣданіи (Bulletin de la Soc Astr. de France. Avril 1895). Перевелъ *К. Смоличъ*.

особенности привлечь вниманіе общества и которымъ суждено оставить глубокій слѣдъ. Вошло въ обычай на этомъ торжественномъ собраніи отмѣчать открытія, повидимому долженствующія стать орудіями общаго прогреса и факты, сообщившіе человѣческой мысли новое направленіе.

Но годъ, этотъ короткій промежутокъ времени, опредѣляемый возвращеніемъ тѣхъ же временъ года, какъ будто укорачивающійся по мѣрѣ того, какъ мы приближаемся къ старости, врядъ ли годенъ для обозначенія послѣдовательныхъ этаповъ прогреса нашихъ знаній: онъ слишкомъ малъ, когда идетъ рѣчь о движеніи идей, въ которомъ жатва не такъ то скоро слѣдуетъ за посѣвомъ и подчасъ заставляетъ себя ждать въ продолженіи цѣлаго ряда поколѣній.

Случаются годы на первый взглядъ безплодные, незамѣтные въ исторіи наукъ; это тѣ годы, когда почва какъ бы отдыхаетъ, сѣмена развиваются, собираются всходить,—это годы размышленія, когда открытія вырабатываются въ тишинѣ и сосредоточеніи мыслей. Время, въ которое открытіе опубликовано, признано и увѣнчано не всегда совпадаетъ съ его дѣйствительнымъ моментомъ. Кто знаетъ, быть можетъ истекшій 1894 годъ, на первый взглядъ ничѣмъ блестящимъ себя не проявившій, оставилъ по себѣ какое нибудь, никѣмъ не подозрѣваемое, прекрасное завоеваніе, готовое появиться на свѣтъ!

Чтобъ понять возможность этого, достаточно вспомнить удивительный рядъ открытій, которыми мы были поражены и которыя составляютъ интелектуальное приданое растущаго вокругъ насъ поколѣнія: спектральный анализъ, теорія броженія, телефонъ, фонометрія, небесная фотографія, цвѣтная фотографія, передача силы на разстояніе, химическій анализъ при температурахъ въ нѣсколько тысячъ градусовъ...

Всѣ эти плодовитыя новости едва только начинаютъ приносить плоды и, какъ убѣждаетъ насъ въ томъ прошедшій опытъ, не замедлятъ повести насъ къ успѣхамъ еще болѣе блестящимъ. Не будемъ поэтому жаловаться на это кажущееся отсутствіе крупныхъ научныхъ событій. Воспользуемся лучше этой передышкой для того, чтобы оріентироваться, упрочить наши новыя пріобрѣтенія, чтобъ вывести изъ нихъ всѣ слѣдствія, чтобъ ихъ расширить. Напрасно мы желали бы избавиться отъ этого труда терпѣливаго анализа и умственнаго созрѣванія: ни одно изъ великихъ открытій не избѣгло этого закона. Всѣ они прошли черезъ болѣе или менѣе продолжительную фазу безвѣстной подготовки, всѣ появились на свѣтъ, какъ необходимое проявленіе предшествовавшаго умственнаго движенія, потому ли что они встрѣчали вначалѣ упорныя и страстныя возраженія, или же потому, что, явившись преждевременно, они должны были выждать болѣе благопріятныхъ для нихъ обстоятельствъ. Но время идетъ и работаетъ всегда въ концѣ концовъ въ пользу истины, послѣдовательно доводя до зрѣлости плоды этого медленнаго и многотруднаго прозябанія.

Такъ въ настоящее время мы присутствуемъ при всеміорномъ тріумфѣ идей нашего знаменитаго собрата—Пастера. Всякому извѣстно, какое упорное сопротивленіе онѣ встрѣтили въ разныхъ кругахъ во время своего появленія и до какой степени нужно было собирать въ пользу ихъ самыя рѣшительныя доказательства. Въ настоящее время эта оппозиція,

которую можно было принять за непреоборимую, должна была покориться очевидности. Всѣ цивилизованные народы основываютъ учрежденія для распространенія приложенія этихъ знаменитыхъ методовъ, сохранившихъ жизнь столькимъ людямъ и содѣйствовавшихъ различнымъ образомъ развитію народнаго богатства, и безсмертныя услуги, оказанныя нашимъ собратомъ человѣчеству, всюду приняты со всеобщей признательностью. Есть ли болѣе краснорѣчивое, чѣмъ эта борьба, происходившая у всѣхъ на глазахъ, доказательство непобѣдимой силы, заключающейся во всякой истинной и плодотворной идеѣ?

Совсѣмъ иная судьба постигла взгляды, высказанные съ-полвѣка тому назадъ нашимъ собратомъ Физо относительно способа распространенія свѣтовыхъ волнъ при движеніи свѣтилъ. Эти взгляды, столь чреватые слѣдствіями, много лѣтъ были въ забвеніи, оставались безплодными въ ожиданіи, пока болѣе совершенные способы изслѣдованія не обнаружатъ ихъ истинной цѣнности.

Уже Допплеръ думалъ, что перемѣщеніе небеснаго тѣла должно обнаружиться измѣненіемъ его окраски, но этой геніальной идеи нельзя было подтвердить опытомъ.

Нашему собрату выпало на долю дать истинно вѣрное средство обнаружить движеніе источника свѣта вдоль луча зрѣнія. Но много успѣховъ нужно было совершить прежде, чѣмъ физика получила возможность пользоваться методомъ, мысль котораго была подана такъ давно. Теперь мы ежедневно видимъ какое нибудь новое приложеніе этого метода. Благодаря ему астрономы теперь знаютъ, съ какою скоростью безчисленныя небесныя тѣла приближаются къ намъ или удаляются отъ насъ; существованіе темныхъ спутниковъ у нѣкоторыхъ звѣздъ изъ простой гипотезы превратилось въ неопровержимую истину. Тотъ же плодотворный методъ далъ намъ драгоцѣнныя указанія и относительно законовъ теченій въ солнечной атмосферѣ и относительно сильныхъ, происходящихъ тамъ, изверженій. Когда нашъ собратъ читалъ 28 дек. 1848 г. свой мемуаръ предъ филоматическимъ обществомъ, могъ ли кто подозрѣвать блестящую будущность, предназначенную наблюденію ничтожныхъ перемѣщеній спектральныхъ линій?

Теорія Максвелля, одного изъ величайшихъ мыслителей вѣка, представляетъ точно также поразительный примѣръ глубокихъ мыслей, прошедшихъ длинный періодъ скрытаго развитія и только недавно давшихъ возможность предвидѣть обширныя слѣдствія, изъ нихъ вытекающія. Его работы приводятъ насъ къ настолько же замѣчательной, насколько и неожиданной точкѣ зрѣнія на электрическія явленія. Выходя изъ нѣкоторыхъ догадокъ Фарадея, Максвелль задумалъ придать имъ цѣльность и математическое выраженіе. Руководимый чѣмъ-то вродѣ прозорливости, онъ создалъ изъ отдѣльныхъ частей неоцѣнимую доктрину; но ей, вслѣдствіе темной и загадочной формы, не удалось убѣдить умы и даже казалось, что она недоступна для опытной провѣрки. Въ высшей степени оригинальный физикъ, преждевременно потерянный наукой, Генрихъ Герцъ сумѣлъ изумительно геніальнымъ способомъ изловить силы природы на мѣстѣ ихъ самыхъ неуловимыхъ проявленій и, такъ сказать, заставилъ ихъ самихъ свидѣтельствовать въ пользу ученія Максвелля.

Мы видѣли, какъ у него токи, прерывавшіеся отъ 100 до 1000 милліоновъ разъ въ секунду, въ столь короткій промежутокъ времени производили индукцію, интерферировали; разъ отраженіе этихъ токовъ стало доступнымъ наблюденію, какъ въ изоляторахъ, такъ и въ проводникахъ,—можно было убѣдиться, что требуется замѣтное время, чтобъ эти электрическія явленія распространились въ тѣсныхъ предѣлахъ лабораторіи.

Герцъ получилъ такимъ образомъ замѣчательное подтвержденіе гипотезы Максвелля, согласно которой электрическія волны распространяются въ пространствѣ со скоростью свѣта, т. е. 300000 килом. въ секунду и также требуютъ посредничества эѳира. Такимъ образомъ безвозвратно исчезло долго державшееся мнѣніе, что передача электрическихъ дѣйствій совершается мгновенно, какъ передача всеобщаго тяготѣнія.

Честь и слава нашему вѣку, увидѣвшему, какъ умъ человѣческій, благодаря чудовищной работѣ мысли, овладѣлъ новой и плодотворной областью. Мы вправѣ теперь утверждать, что между свѣтомъ и электричествомъ, не смотря на различныя проявленія, нѣтъ другой разницы, кромѣ большей или меньшей величины эѳирныхъ волнъ, которыми они распространяются. Каждая изъ обѣихъ вѣтвей науки отнынѣ смѣло можетъ пользоваться всякимъ успѣхомъ, совершеннымъ въ другой. Видя, что многочисленныя метаморфозы неорганической и живой матеріи, происходящія подъ вліяніемъ этихъ двухъ дѣятелей, совершаются отъ волненія невѣсомой жидкости, можемъ ли мы не удивляться глубокой мудрости плана, осуществленіе котораго представляетъ природа?

Первые опыты Герца, прогремѣвшіе на весь цивилизованный міръ, нашли подтвержденіе въ выкладкахъ нашего собрата Пуанкаре и въ настолько же геніальныхъ, насколько и точныхъ опытахъ Блондло, Сарасена и Де-ля-Рива—подтвержденіе, открывшее новымъ теоріямъ безграничное поле изслѣдованія. Если подумаешь, что средняя длина свѣтовыхъ волнъ едва равна 0,0003 mm., а длина электрическихъ волнъ доходитъ до сравнительно огромной цифры въ 30 сантим., то какъ не поразиться такой разницей въ величинѣ колебаній, производящихъ электрическія и свѣтовыя дѣйствія? Не кажется ли, что эта огромная пропасть должна заполняться колебаніями промежуточной величины, производящими доселѣ неизвѣстныя явленія, природа и способъ дѣйствія которыхъ откроются физикамъ будущаго?

Можно ли считать эту надежду слишкомъ смѣлой, если принять во вниманіе блестящія пріобрѣтенія естественной философіи за послѣднее столѣтіе?

Не будемъ же думать, что научное движеніе замедлилось, потому только, что мы не видѣли поразительныхъ открытій. Въ данный моментъ вокругъ насъ созрѣваютъ капитальные научные труды, значеніе и предѣлъ которыхъ безумно было бы пытаться установить; но прогресъ, происшедшій на нашихъ глазахъ, способенъ внушить полное довѣріе къ будущему.

ЗАДАЧИ.

№ 206. Три шара, центры которыхъ O_1, O_2 и O_3, имѣютъ двѣ общія точки A и B. Черезъ точку A проведены діаметры AO_1C_1, AO_2C_2, AO_3C_3. Показать, что плоскость, опредѣляемая тремя точками C_1, C_2 и C_3, проходитъ черезъ точку B.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

№ 207. Представить въ видѣ произведенія выраженіе

$$\cos 2nx + \cos 2ny + \cos 2nz + 1,$$

если $x + y + z = 180^0$.

А. Бачинскій (Холмъ).

№ 208. Данъ треугольникъ ABC. Вычислить безъ помощи тригонометріи стороны и площадь такого треугольника, котораго одна сторона равна AB, а прилежащіе къ ней углы равны B и $3A$.

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 209. Найти безъ помощи тригонометріи *) отношеніе сторонъ такого треугольника, углы котораго содержатъ 45^0, 60^0 и 75^0.

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 210. Даны двѣ соприкасающіяся окружности. Опредѣлить радіусъ окружности, касающейся этихъ окружностей и общей ихъ касательной.

(Заимств.). *Д. Е.* (Иваново-Вознесенскъ).

№ 211. Найти всѣ трехзначныя числа, обладающія тѣмъ свойствомъ, что сумма ихъ цифръ равна разности между числомъ, получающимся изъ искомаго трехзначнаго числа, если зачеркнуть въ немъ послѣднюю цифру, и числомъ, получающимся отъ зачеркиванія въ томъ же трехзначномъ числѣ первой цифры.

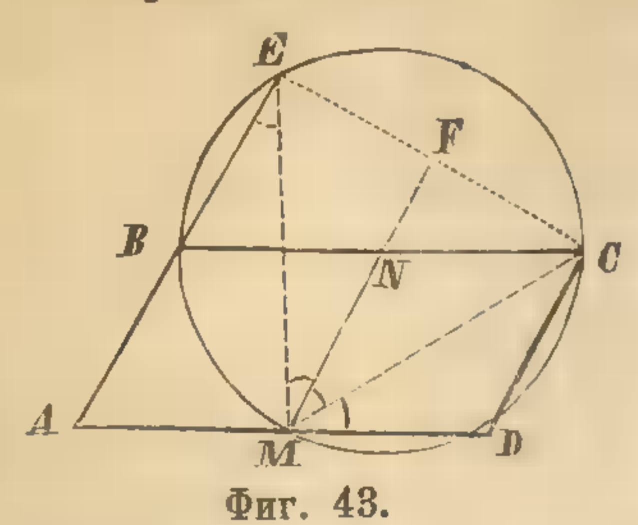
Я. Полушкинъ (с. Знаменка).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 125 (3 сер.). Въ параллелограммѣ $ABCD$ сторона $BC = 2AB$. Изъ вершины его C опущенъ перпендикуляръ CE на сторону AB и точка E соединена съ серединою M стороны AD. Показать, что уголъ DME втрое больше угла AEM.

*) Тригонометрическое рѣшеніе см. VI сем. „Вѣстника“, стр. 216, зад. № 272.

1. Проведя $MF \perp CE$ (фиг. 43) и замѣтивъ, что $EF = FC$, находимъ, что $\angle EMF = FMC$; а такъ какъ фигура $MNCD$ есть ромбъ, то $\angle FMC = \angle CMD$; но $\angle AEM = \angle EMF$, слѣдовательно $\angle DME = 3 \angle AEM$.



Фиг. 43.

А. Дмитріевскій, Ѳ. Александровъ (Цивильскъ); *Э. Заторскій, И. Барковскій* (Могилевъ губ.); *П. Бѣловъ* (с. Знаменка); *ученикъ Кіево-Печерской гимназіи*; *А. Павлычевъ, Н. Кузнецовъ* (Иваново-Вознесенскъ); *П. Хлѣбниковъ* (Тула); *С. Адамовичъ* (с. Спасское); *А. Мошковскій* (Варшава); *П. Р.* (Ромны); *А Маховъ* (Ливны).

2. Если радіусомъ $BN = NC = NM$ опишемъ изъ точки N окружность, то она пройдетъ черезъ точку E. Изъ чертежа видно, что

$$\angle EMD = \angle EMN + \angle NMD;$$

$$\angle EMN = \angle AEM, \ \angle NMD = BNM = 2AEM,$$

а потому

$$\angle EMD = 3 \angle AEM.$$

А. Варенцовъ (Ростовъ на Дону).

Отъ г. *А. Бачинскаго* (Холмъ) получено тригонометрическое рѣшеніе задачи.

№ 135 (3 сер.). Рѣшить безъ помощи тригонометріи слѣдующую задачу (взятую изъ „Собранія вопросовъ и задачъ прямолинейной тригонометріи“ Верещагина, изд. 2, № 652).

„Вычислить острые углы такого прямоугольнаго треугольника, площадь котораго составляетъ $^1/_8$ площади квадрата, построеннаго на гипотенузѣ“.

Пусть A есть вершина прямого угла, AD—высота, AO—медіана гипотенузы BC. По условію

$$\frac{\overline{BC}^2}{8} = \frac{BC.AD}{2}, \text{ откуда } AD = \frac{BC}{4};$$

слѣдовательно въ прямоугольномъ треугольникѣ AOD катетъ AD вдвое меньше гипотенузы AO, а потому $\angle AOD = 30^0$, $\angle ABC = 15^0$, $\angle ACB = 75^0$.

П. Хлѣбниковъ (Тула); *Н. Кузнецовъ, А. Павлычевъ* (Иваново-Вознесенскъ); *И. Барковскій, Э. Заторскій* (Могилевъ губ.); *Е. Зновицкій* (Кіевъ); *А. Гальпернъ* (Пинскъ); *А. Бачинскій* (Холмъ); *М. Орѣшниковъ* (Казань); *А. Дмитріевскій* (Цивильскъ); *Ученики Кіево-Печерской гимназіи Л. и Р.; Я. Полушкинъ* (с. Знаменка).

№ 142 (3 сер.). Рѣшить уравненіе:

$$4(\cos^6 x - \sin^6 x) - 3(\cos^4 x - \sin^4 x) - 2(\cos^2 x - \sin^2 x) + 1 = 0.$$

Данное уравненіе можно представить въ такомъ видѣ:

$$4(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^4 x + \cos^2 x.\sin^2 x + \sin^4 x) - 3(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) -$$

$$-2(\cos^2 x - \sin^2 x) + 1 = 0;$$

но такъ какъ

$$\cos^4 x+\cos^2 x.\sin^2 x+\sin^4 x=\cos^2 x+\sin^4 x=1-\sin^2 x.\cos^2 x=$$

$$=1-\frac{\sin^2 2x}{4}, \text{ а } \cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x,$$

то

$$\cos 2x[4-\sin^2 2x-3-2]+1=0,$$

или

$$\cos 2x(1+\sin^2 2x)-1=0,$$

или

$$\cos^3 2x-2\cos 2x+1=0.$$

Это уравненіе разлагается на два множителя:

$$(\cos 2x-1)(\cos^2 2x+\cos 2x-1)=0;$$

слѣдовательно

1) $\cos 2x_1=1,\ x_1=n\pi,$

2) $\cos^2 2x_2+\cos 2x_2-1=0,$ т. е. $\cos 2x_2=\frac{\pm\sqrt{5}-1}{2}.$

В. Сахаровъ (Тамбовъ); *А. Бачинскій* (Холмъ); *В. Шидловскій* (Полоцкъ); *В. Ахматовъ* Тула); *Г. Легошинъ* (с. Знаменка); *И. Барковскій* (Могилевъ губ.); *ученики Кіево-Печерской гимназіи Л.* и *Р*; *Э. Заторскій* (Вильна).

ПОЛУЧЕНЫ РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ отъ слѣдующихъ лицъ: *В. Сахарова* (Тамбовъ) 185, 187 (3 сер.); *Т. Рощуковскаго* (Хотинъ) 168 (3 сер.); *А. Павлычева* (Иваново-Вознесенскъ) 91, 115, 118, 135, 147, 148 (3 сер.); *Д. Посторонняго* (Тамбовъ) 160 (3 сер.); *М. Зимина* (Орелъ) 153, 155, 156, 157, 167, 168 (3 сер.); *учениковъ Кіево-Печерской гимназіи Л.* и *Р.* 31, 50, 54, 60, 62, 63, 65, 73, 77, 89, 91, 122, 135, 150, 153, 155, 156, 157, 160, 165, 166, 167, 168, 171, 172, 173, 176, 178, 179, 184, 186, 187 (3 сер.) и 408 (2 сер.); *А. Дмитріевскаго* (Цивильскъ) 160, 167, 168 (3 сер.); *П. Бѣлова* (с. Знаменка) 170, 192 (3 сер.); *Я. Полушкина* (с. Знаменка) 128, 135, 140, 176, 178, 181, 193, 197, 198 (3 сер.), 68 (2 сер.); *Г. Легошина* (с. Знаменка) 184, 187, 191 (3 сер.), 520 (1 сер.); *И. Барковскаго* (Могилевъ губ.) 136, 161, 162, 163, 165, 166, 167, 168, 171 (3 сер.); *Э. Заторскаго* (Вильна) 112, 129, 142, 161, 162 (3 сер.), 262 (2 сер.); *L* (Тамбовъ) 166, 171, 172, 174, 176, 178, 185, 187, 190, 192 (3 сер.); *К. Зновицкаго* (Кіевъ) 176 (3 сер.) *Г. Березникова* (с. Знаменка) 172 (3 сер.); *П. Хлѣбникова* (Тула) 84, 116, 144, 145, 150, 154, 157, 158, 160, 166, 168, 172, 173, 174, 182, 183, 184, 185, 188, 192 (3 сер.).



Редакторъ-Издатель Э. К. Шпачинскій.

Дозволено цензурою. Одесса, 10-го Іюля 1895 г.

„Центральная типо-литографія", уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. Болгарова

БИБЛІОГРАФИЧЕСКІЙ ЛИСТОКЪ

НОВѢЙШИХЪ ФРАНЦУЗСКИХЪ ИЗДАНІЙ.

Физика, астрономія, физ. географія, метеорологія.

XX-e Bulletin météorologique annuel du département des Pyrénées Orientales. Publié sous les auspices du département et de La ville de Perpignan par le docteur Fines. (Année 1891). In- 4^0, 42 p. Perpignan.

Champeaux, G. de. Observations meteorologiques faites à Autun de l'année 1868 à 1892 inclusivement. In- 8^0, 18 p. et planches. Autun.

Doneux, Le lieutenant-colonel, *A*. Électricité et magnétisme terrestres. Théorie de N. - R. Brück, appliquée à la physique du globe, à la météorologie, aux incendies et au grisou. Tome I: Les incendies et les explosions. Possibilité des erreurs judicaires. La nouvelle météorologie. Tome II: Le grisou. La volcanicité. La nouvelle météorologie. Tome III: La période seizennale et ses subdivisions dans les phénomènes de la météorologie et de la physique du globe. Paris. 3 vol., in- 16^0, 372, 408 et 387 p. fr. 9.

Etude des orages de l'année 1892; par M. M. les instituteurs communaux, sous les auspices du conseil général du département de la Haute-Garonne. In- 8^0, 24 p. et cartes. Toulouse.

Houdaille. Sur une méthode d'essai scientifique et pratique des objectifs photografiques et des instruments d'optique. In- 8^0, 80 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils. fr. 2,50.

Issaly. Optique géométrigue. Cinquième mémoire. Théorie mathématique nouvelle de la polarisation rectiligne des principaux agents physiques et spécialement de la lumière. In- 8^0, 66 p. Bordeaux.

Plumandon, 1 *R*. Influence des fôrets et des accidents du sol sur les orages à grêle. In- 8^0, 22 p. Clermont-Ferrand.

Rayet, G. Observations pluviométriques et thermométriques faites dans le département de la Gironde de juin 1892 à mai 1893. Appendice au tome 4, 4-e série, des Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. In- 8^0, 63 p. et carte. Bordeaux.

Voyer, I. Theorie élémentaire des courants alternatifs. In- 8^0, 91 p. avec fig. Paris, G. Carré.

Fabry, L. Etude sur la probabilité des comètes hyperboliques et l'origine des comètes (thèse). In- 4^0, 213 p. Marseille.

Fourtier, H. et *A. Molteni.* Les Projections scientifiques. Etude des appareils, accessoires et manipulations diverses pour l'enseignement scientifique par le projections. In- 18 jésus, 296 p. avec grav. Paris, Gauthier-Villars et fils.

Prigent, G. De l'habitabilité des astres, ou considérations astronomiques, physiques et météorologiques sur l'habitabilité de quelques astres, notamment des grandes planètes, tant anciennes que modernes, circulant autour du Soleil. In- 8^0, 456 p. Landerneau.

Annuaire de l'observatoire municipal de Montsouris pour l'année 1894. (Analyse et travaux de 1892). Météorologie, Chimie, Micrographie, Applications à l'hygiène. In- 18^0, VI+649 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils. fr. 2.

Bertrand, E. La Couleur et la Perspective dans la peinture antique. In- 8^0, 57 p. Grenoble.

Imbert, A. Traité élémentaire de physique biologique. Avec 450 fig. intercalées dans le texte. Première partie: Pesanteur, Acoustique, Optique. In- 8^0, p. 1 — 608. Paris, J. B. Baillière et fils.

Martin, A. Méthode directe pour la détermination des courbures des objectifs de photographie. Jn - 8^0, 71 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils.

Rayet. G. Observations pluviométriques et thermométriques faites dans le département de la Gironde de juin 1892 à mai 1893. Note de M. G. Rayet, président de la commission météorologique départementale. In- 8^0, 63 p. et carte. Bordeaux.

БИБЛІОГРАФИЧЕСКІЙ ЛИСТОКЪ

НОВѢЙШИХЪ АНГЛІЙСКИХЪ ИЗДАНІЙ.

Математика.

Bowser, *E. A.* An Elementary Treatise on Analytic Geometry, embracing Plane Geometry and an Introduction to Geometry of Three Dimensions. 17 th and enlarged Edit. Illustrated. 12 mo (New York) London. 7 s. 6 d.

Smith, *C.* Geometrical Conics. Post 8 vo, pp. 256. Macmillan. 6 s.

Thornton, *A.* Theoretical Mechanics: Solids, including Kinematics, Statics, and Kinetics. Post 8vo. pp. 422 (Advanced Science Manuals) Longmans. 4 s. 6 d.

Cayley, *A.* Collected Mathematical Papers. Vol 7. 4 to. Camb., Warehouse. 25 s.

Mathematical Questions and Solutions; from „Educational Times", etc. Edited by W. J. C. Miller. Vol. 61. 8 vo. Hodgson. 6 s. 6 d. boards.

Edwards, *J.* Integral Calculus for Beginners. With an Introduction to the Study of Differential Equations. Post 8 vo. pp. 316. Macmillan. 4 s. 6 d.

Dixon, *A. C.* The Elementary Propeties of the Elliptic Functions; with Examples. Post 8 vo, pp. 140. Macmillan 5 s.

Hale, *G.* Solutions of the Examples in Charles Smith's Arithmetic for Schools. Post 8 vo, pp. 424. Camb., Warehouse, 7 s. 6 d.

Hutton, *C.* Mathematical Tables. With Seven Additional Tables of Trigonometrical Formulae. New edit., roy. 8 vo. pp. 436. Whittaker. 12 s.

Ziwet, *A.* An Elementary Treatise on Theoretical Mechanics. Part 3: Kinetics. 8 vo. Macmillan. 8 s. 6 d. net.

Hall, *H. S.* and *Stevens*, *F. H*: A Text-book of Euclid's Elements, Books I—III. 12 mo. pp. 250. Macmillan. 2 s. 6 d.

Barlow, *C. W. C.* and *Bryan*, *G. H.* Geometry of the Similar Figures and the Plane. 12 mo, pp. 122. (Univ Tutorial Series) Clive. 2 s. 6 d.

Todhunter, *I.* and *Hogg*, *R. W.* Key to Plane Trigonometry. Post 8 vo. pp. 476. Macmillan. 10 s. 6 d.

Angel, *H.* Practical, Plane and Solid Geometry: Key to Examinatons of Science and Art Department (Subject I.) Post 8 vo, pp. 272. Chapman. 3 s. 6 d.

Besant, *W. H.* Conic Sections treated Geometrically. 9 th edit. revised and enlarged. Post 8 vo. pp. 286. Bell & S. 4 s. 6 d.

Barlow, *C. W. C.* and *Bryan*, *G. H.* Matriculation Model Answers in Mathematics: the Examination Papers from June 1888 to January 1894. With Solutions Clive 2 s.

Grubb, *A. G.* Practical, Plane and Solid Geometry (Elementary Stages). Whith Notes and Answers for Five Jears, 1889 to 1893. Subject I. 8 vo (Blackburn, Coward) Moffatt. 6 d.

Loney, *S. L.* Plane Trigonometry. Part 2: Analytical Trigonometry. Post 8 vo. pp. 180. Camb. Warehouse. 3 s. 6 d.

Физика, астрономія, физ. географія, метеорологія.

Mee, *A.* Observational Astronomy: a Book for Beginners. To which is added a brief Memoir of the Rev Prebendary Wabb, with a specially contributed Appendix. With Illustrations. Roy. 8 vo, (Cardif, Owen) pp. 86. Simpkin. 2 s. 6 d.

Davis, *W. M.* Elementary Meteorology. 8 vo (Boston) London. 10 s. 6 d.

Earl, *A.* Practical Lessons in Physical Measurement. Post. 8 vo. pp. 352. Macmillan. 5 sol.

Laboratory Manual of Physics and Applied Electricity. Arranged and edited by E. L. Nichols (2 vols). Vol. 1: Junior Course in General Physics. by E. Merritt and. F. J. Rogers. 8 vo. Macmillan. 12 s. 6 d. net.

Webb, *T. W.* Celestial Objects for Common Telescope. 5th edit. revised and greatly enlarged, by Rev. T. E. Espin. (2 vols.). Vol. 2. Post 8 vo. pp. 285. Longmans. 6 s. 6 d.

ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

MATHESIS.

1895. — № 1.

Sur l'axe d'homologie du triangle fondamental et du triangle de Brocard. Par *M. G. Tarry.* Теорема. Гомологичныя точки двухъ гомографическихъ фигуръ на плоскости, находящiяся на прямыхъ, проходящихъ черезъ одну постоянную точку, образуютъ коническiя сѣченiя, проходящiя черезъ эту точку и двойныя точки фигуръ. Гомологичныя прямыя двухъ гомографическихъ фигуръ, пересѣкающiяся на одной постоянной прямой, обертываютъ коническiя сѣченiя, касательныя къ этой прямой и къ двойнымъ прямымъ обѣихъ фигуръ. (*Chasles.* Géom. Supér.).

Изъ этой теоремы M. Tarry выводитъ слѣдующiя слѣдствiя. Пусть ABC— основной тр-къ, $A_1B_1C_1$—первый тр-къ Brocard'a; эти тр-ки, будучи обратно подобными, образуютъ гомографич. фигуры φ и φ'. Двойныя прямыя этихъ фигуръ суть прямая въ безконечности i и оси эллипса Steiner'a δ и δ'; двойныя точки суть барицентръ G и точки въ безконечности на δ и δ'.

Для данной точки X геометрич. мѣста гомологическихъ точекъ, лежащихъ на прямой, проходящей черезъ X, суть конич. сѣченiя S и S'; для данной прямой x гомологическiя прямыя, пересѣкающiяся на x гомологическiя прямыя, пересѣкающiяся на x, обертываютъ конич. сѣченiя s и s'.

Кривыя S и S' суть равнобочныя гиперболы, проходящiя черезъ G; ассимптоты ихъ параллельны прямымъ δ и δ'. Если за X взять центръ гомологiи D тр-въ ABC и $A_1B_1C_1$, то гипербола S будетъ описанной около тр-ка ABC гиперболой Kiepert'a. Всякая прямая, соединяющая точку этой кривой съ гомологической точкой фигуры φ', проходитъ черезъ D. Напр., прямая NO, соединяющая точку Tarry N съ центромъ O круга ABC, проходитъ черезъ D.

Кривыя s и s' суть параболы, касательныя къ осямъ Steiner'a δ и δ'. Если вмѣсто x взять ось гомологiи d тр-въ ABC и $A_1B_1C_1$, то параболы s и s' будутъ касательными къ сторонамъ этихъ тр-въ и къ прямой d. Директрисса параболы s проходитъ черезъ ортоцентръ H тр-ка ABC и черезъ пересѣченiе прямыхъ δ и δ', т. е. совпадаетъ съ прямой Euler'a HO; поэтому s есть парабола Neuberg'a. Прямыя, соединяющiя точки касанiя ея къ сторонамъ тр-ка ABC съ вершинами этого тр-ка, проходятъ черезъ точку Steiner'a.

Фокусъ F параболы s есть вторая точка пересѣченiя окружности ABC съ прямой NG; фокусъ F' параболы s' есть вторая точка пересѣченiя окружности Brocard'a съ прямой, соединяющей центръ круга ABC съ барицентромъ G.

Ось гомологiи d *тр-въ* ABC *и* $A_1B_1C_1$ *перпендикулярна къ линiи* FF' *и дѣлитъ ее пополамъ.*

Sur une certaine enveloppe. Par *M. Desaint.* Нормаль къ эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

въ точкѣ (x,y) выражается ур-нiемъ

$$\frac{a^2X}{x}-\frac{b^2Y}{y_1}=a^2-b^2;$$

M. Desaint доказываетъ, что вообще ур-нiе вида

$$\frac{mX}{x_1} + \frac{nУ}{y_1} = p, \qquad (1)$$

гдѣ x_1 и y_1 координаты точки эллипса

$$\frac{x_1^2}{A^2} + \frac{y_1^2}{B^2} = 1, \qquad (2)$$

принадлежитъ прямой, нормальной къ эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

гдѣ

$$a^2 = \frac{m^2(a^2 - b^2)^2}{p^2A^2}, \quad b^2 = \frac{n^2(a^2 - b^2)^2}{p^2B^2}.$$

Точно такъ же, если x_1, y_1 суть координаты эллипса (2), то прямая

$$\frac{X - m'x_1}{mx_1} = \frac{У - n'y_1}{ny_1} \qquad (3)$$

нормальна къ нѣкоторому эллипсу.

Если $M(x,y)$ и $M_1(x_1,y_1)$ суть точки эллипсовъ E и E', (оси которыхъ суть a, b и a_1, b_1), удовлетворяющія условіямъ

$$\frac{x}{a} = \frac{x_1}{a_1}, \ \frac{y}{b} = \frac{y_1}{b_1},$$

то прямая MM_1, выражающаяся ур-емъ

$$\frac{X - x_1}{x_1\left(1 - \frac{a}{a_1}\right)} = \frac{У - y_1}{y_1\left(1 - \frac{b}{b_1}\right)}$$

нормальна къ нѣкоторому третьему эллипсу.

Пусть $M(x,y)$ есть точка эллипса E, m—поляра этой точки относительно эллипса E'; $M_1(x_1,y_1)$—полюсъ m относительно элл. E_1; предполагая, что оси эллипсовъ E, E', E_1 совпадаютъ по положенію, по предыдущему найдемъ, что MM_1 нормальна къ нѣкоторому эллипсу. Если вмѣсто E_1 взять эллипсъ, обертываемый прямой m, то M_1 будетъ точкой касанія его съ m. Слѣдов., прямая, соединяющая какую нибудь точку элл. E съ точкой касанія его поляры относительно E' съ обертываемымъ ею эллипсомъ, нормальна къ нѣкоторому эллипсу.

Notes mathématiques. 1. *Sur l'équation biccarée* (Hermite). Корни биквадратнаго ур-нія $x^4 + px^2 + q = 0$, какъ извѣстно, опредѣляются формулой

$$x = \pm\sqrt{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}},$$

изъ которой видно, что если два корня ур-нія суть a и b, то другіе два корня суть $-a$ и $-b$, причемъ $a^2 + b^2 = -p$, $a^2b^2 = q$; опредѣливъ отсюда a и b, увидимъ, что общая формула корней биквадратнаго ур-нія можетъ быть представлена въ видѣ

$$x = \frac{1}{2}\left[\sqrt{-p + 2\sqrt{q}} + \sqrt{-p - 2\sqrt{q}}\right].$$

2. *Solution d'un problème de géométrie*. Сообщается рѣшеніе задачи: *Въ данный кругъ O вписать чет-къ ABCD, діагонали котораго суть* $AC = d$, $BD = d'$, $EF = d''$.

Sur un théorème de Poncelet. Par *M. J. Neuberg*. Если

$$ax^2 + by^2 + cz = 0, \ x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

суть ур-нія коническихъ сѣченій U и U_1, то при условіи $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 0$ *существуетъ безчисленное множество тр-въ одновременно вписанныхъ въ U и описанныхъ около* U_1 (Poncelet). Дается новое аналитическое доказательство этой теоремы.